NŠA konsultacija mokiniams, besirengiantiems laikyti matematikos VBE II dalies A kursą

NŠA
2026-05-25

Valdas Vanagas

VBE-II-A-03-04.pdf

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino II dalies

bandomojo patikrinimo užduoties sprendimai

Išplėstinis kursas

2026 m. kovo 4 d. **Trukmė – 4 val. (240 min.)**

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, atsakymų lapą ir formulių rinkinį, pasitikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite patikrinimo vykdytojui.
2. **Atsakymų lape įrašykite savo klasę, vardą ir pavardę.**
3. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei neabejojate dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
4. Per patikrinimą galite rašyti juodai arba mėlynai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
5. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite **juodai arba mėlynai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis. Jei savo atsakymą ir (arba) sprendimą keičiate, nubraukite jį ir aiškiai užrašykite naują.
6. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
7. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
8. **I dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
9. **II dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **II dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
10. Pasibaigus patikrinimui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.

Linkime sėkmės!

I dalis

*Kiekvieno šios dalies uždavinio (1–10) teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**.*
Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

01. Raskite aibių $A = [-5; 3)$ ir $B = [0; 2]$ sąjungą.

Sprendimas.

$$A \cup B = [-5; 3) \cup [0; 2] = [-5; 3).$$

Atsakymas. $A \cup B = [-5; 3)$

Namų darbas

1. Raskite aibių $A = \{1;\ 3;\ 5\}$ ir $B = \{3;\ 5;\ 7\}$ sąjungą $A \cup B$, sankirtą $A \cap B$, skirtumą $A \setminus B$, skirtumą $B \setminus A$.

2. Raskite intervalų $A = (1; 5]$ ir $B = (3; 7)$ sąjungą, sankirtą, skirtumus.

3. Raskite intervalų $A = [-5; 3)$ ir $B = [0; 2]$ sankirtą, skirtumus.

Nesupainiokite sąjungos ∪ su sankirta ∩.

02. Panaikinkite iracionalumą trupmenos $\frac{m}{\sqrt{5}-2}$ vardiklyje.

Sprendimas.

$$\frac{m}{\sqrt{5}-2}=\frac{m}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{m\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{m\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}^2-2^2}=\frac{m\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4}=$$

$$=\frac{m\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}{1}=m\cdot\left(\sqrt{5}+2\right).$$

Atsakymas. $\frac{m}{\sqrt{5}-2}=m\cdot(\sqrt{5}+2)$

Namų darbas

1. Panaikinkite iracionalumą trupmenos vardiklyje:

$$\frac{m}{\sqrt{5}+2},\ \ \frac{m}{\sqrt{5}-\sqrt{2}},\ \ \frac{m}{5-\sqrt{2}};$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}},\ \ \frac{8}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}.$$

2. Formulių rinkinyje yra formulės:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

03. Atsitiktinio dydžio X skirstinys pateiktas lentele. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį **E**X.

m	-4	1	6	2
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{28}{125}$

Sprendimas.

$$\mathbf{E}X = -4 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{32}{125} + 6 \cdot \frac{8}{25} + 2 \cdot \frac{28}{125} = \frac{-100 + 32 + 240 + 56}{125} = \frac{228}{125} = 1\frac{103}{125}.$$

Atsakymas. $\mathbf{E}X = 1\frac{103}{125}$

Namų darbas

1. Atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybių suma lygi 1.

2. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio dispersiją **D**X.

04. Apskaičiuokite funkcijų $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ ir $y=5^{x+2}$ grafikų susikirtimo taško koordinates.

Sprendimas.

1. Apskaičiuojame grafikų susikirtimo taško abscisę:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{x+2},\quad \Rightarrow\quad (5^{-1})^x=5^{x+2},\quad \Rightarrow\quad 5^{-1\cdot x}=5^{x+2},$$
$$5^{-x}=5^{x+2},$$
$$-x=x+2,\quad \Rightarrow\quad -2x=2,\quad x=-1.$$

2. Apskaičiuojame grafikų susikirtimo taško ordinatę.

Kai $x=-1$, tai

$$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{1}\right)^1=5^1=5.\quad (\text{Arba } y=5^{-1+2}=5^1=5.)$$

Atsakymas. $(-1;5)$

Namų darbas

1. Nustatykite lygties $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{x+2}$ sprendinius.

2. Nubraižykite grafikus $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ ir $y=5^{x+2}$.

3. Nustatykite nelygybių $\left(\frac{1}{5}\right)^x>5^{x+2}$ ir $\left(\frac{1}{5}\right)^x\le 5^{x+2}$ sprendinius.

05. Agnė sugalvojo triženklį natūralųjį skaičių. Kokia tikimybė, kad Agnės sugalvoto skaičiaus visi trys skaitmenys yra skirtingi?

Sprendimas.

I būdas. Naudojamės klasikine tikimybės apibrėžtimi.

Triženklių skaičių (nuo 100 iki 999) iš viso yra $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Triženklių skaičių, kurių visi trys skaitmenys skirtingi yra $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Tikimybė, kad Agnės sugalvoto triženklio skaičiaus visi trys skaitmenys skirtingi yra lygi

$$\mathbf{P}(\text{visi trys skirtingi}) = \frac{648}{900} = \frac{324}{450} = \frac{162}{225} = \frac{54}{75} = \frac{18}{25}.$$

II būdas.

$$\mathbf{P}(\text{visi trys skirtingi}) = \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}.$$

Atsakymas. $\frac{18}{25}$

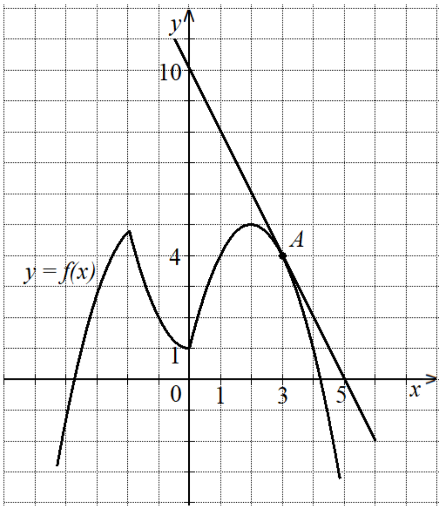
Namų darbas

1. Kokia tikimybė, kad Agnės sugalvoto skaičiaus visi trys skaitmenys yra vienodi?

2. Kokia tikimybė, kad Agnės sugalvoto skaičiaus lygiai du skaitmenys yra vienodi?

Dviženklio, triženklio, ... natūraliojo skaičiaus pirmasis skaitmuo negali būti 0.

06. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas ir per šio grafiko tašką $A(3; 4)$ nubrėžta liestinė. Naudodamiesi paveikslo duomenimis, nustatykite funkcijos $y = f(x)$ išvestinės reikšmę taške $x = 3$.



Sprendimas.

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės $y = k \cdot x + b$, liečiančios jį taške $A(3; 4)$, krypties koeficientas k yra lygus funkcijos išvestinės reikšmei taške $x = 3$, t. y. $f'(3) = k$.

Iš paveikslo duomenų matome, kad liestinė – tiesė $y = k \cdot x + b$ – eina per taškus $(0; 10), (3; 4), (5; 0)$.

Apskaičiuojame liestinės krypties koeficientą.

I būdas. Naudojamės liestinei priklausančių taškų $(0; 10), (5; 0)$ koordinatėmis:

$$10 = k \cdot 0 + b, \;\Rightarrow\; b = 10;$$

$$0 = k \cdot 5 + 10, \;\Rightarrow\; k = -2.$$

Vadinasi, $f'(3) = -2$.

II būdas.

Liestinė $y = k \cdot x + b$ su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro kampą α, kurio tangentas lygus liestinės krypties koeficientui, t. y. $\mathrm{tg}(\alpha) = k$.

Apskaičiuojame $\mathrm{tg}(\alpha)$. Iš stačiojo trikampio AOB, $A(0; 10), O(0; 0), B(5; 0), AO = 10, OB = 5$:

$$\mathrm{tg}(\angle B) = \frac{OA}{OB} = \frac{10}{5} = 2;$$

$$\mathrm{tg}(\angle B) = \mathrm{tg}(180° - \alpha) = \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}(\alpha);$$

$$-\mathrm{tg}(\alpha) = 2,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = -2.$$

Atsakymas. $f'(3) = -2$

Namų darbas

Kai yra žinoma funkcijos $y = f(x)$ formulė, tai liestinės $y = k \cdot x + b$, liečiančios grafiką taške $(x_0; f(x_0))$, koeficentus k ir b galima apskaičiuoti naudojantis liestinės lygties formule:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0),$$

$$k = f'(x_0), \quad b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0).$$

07. Žinoma, kad $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$. Apskaičiuokite $\sin(2\alpha)$ reikšmę.

Sprendimas.

Lygybę $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$ pakeliame antruoju laipsniu:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8, \quad \uparrow^2$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 0{,}8^2,$$

$$\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0{,}64,$$

$$1 + \sin(2\alpha) = 0{,}64,$$

$$\sin(2\alpha) = -0{,}36.$$

Atsakymas. $-0{,}36$

Namų darbas

1. Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\cos\alpha = 0{,}8$, o α yra ketvirtojo ketvirčio posūkio kampas.

2. Raskite kampo $\alpha \in (270°; 360°)$ didumą vieno laipsnio tikslumu, jei:

$$\cos\alpha = 0{,}8; \qquad \sin\alpha = -0{,}4; \qquad \operatorname{tg}\alpha = -2.$$

08. Žinoma, kad vektoriai $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ir $\vec{b} = (x; y)$ yra priešpriešiniai. Vektoriaus $\vec{b}$ ilgis lygus $2\sqrt{13}$. Nustatykite vektoriaus $\vec{b}$ koordinates x ir y.

Sprendimas.

$$\vec{a}(-3; 2) \upharpoonleft\downharpoonright \vec{b}(x; y), \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = k \cdot \vec{a}, \ \ k < 0;$$

$$\vec{b}(x; y) = k \cdot \vec{a}(-3; 2) = \vec{a}(-3k; 2k).$$

Vadinasi, $x = -3k, y = 2k$, čia $k < 0$.

$$\left|\vec{b}(-3k; 2k)\right| = \sqrt{(-3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{9k^2 + 4k^2} = \sqrt{13k^2} = -k\sqrt{13}.$$

Vadinasi,

$-k\sqrt{13} = 2\sqrt{13}, \ \ -k = 2, \ k = -2;$

$x = -3 \cdot (-2) = 6,$

$y = 2 \cdot (-2) = -4.$

Atsakymas. $x = 6, y = -4$

Namų darbas

1. Prisiminkite su vektoriais susijusią teoriją, kai vektoriai yra:

- geometriniai (trikampio, keturkampio kraštinėse);
- koordinačių plokštumoje.

2. Prisiminkite, kaip randama vektorių suma, skirtumas, skaliarinė sandauga, kaip vektorius dauginamas iš skaičiaus.

3. Išspręskite keletą uždavinių.

09. Žinoma, kad kūno greitis v metrais per sekundę (m/s) yra judėjimo laiko t funkcija $v(t) = 2t$, kur t – judėjimo laikas sekundėmis (s). Nustatykite kūno nueitą kelią metrais (m) per pirmąsias 5 judėjimo sekundes.

Sprendimas.

Kūno nueitas kelias

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Per pirmąsias 5 sekundes kūnas nueis kelią lygų

$$\int_0^5 2t\,\mathrm{d}t = (t^2)|_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25 \text{ (m)}.$$

Atsakymas. 25 m

Namų darbas

1. Kelio išvestinė yra greitis.

2. Greičio išvestinė yra pagreitis.

3. Prisiminkite, kaip randama funkcijos $y = f(x)$:

- visos pirmykštės funkcijos $y = F(x) + C$;
- ta pirmykštė funkcija, kurios grafikas eina per nurodytą tašką.

4. Prisiminkite, kaip randamas funkcijų grafikų ir tiesėmis apribotų koordinačių plokštumos srities plotas; sukinio tūris.

10. Žinoma, kad $2^x = 15$ ir $15^y = 32$. Nustatykite sandaugos $x \cdot y$ reikšmę.

Sprendimas.

$$2^x = 15, \;\; x = \log_2 15;$$

$$15^y = 32, \;\; y = \log_{15} 32.$$

Randame sandaugą:

$$x \cdot y = \log_2 15 \cdot \log_{15} 32 = \log_2 15 \cdot \frac{\log_2 32}{\log_2 15} = \log_2 32 = 5.$$

Atsakymas. $x \cdot y = 5$

Namų darbas

Prisiminkite logaritmo pagrindo keitimo formulę.

I dalis

Įrašykite tik gautus atsakymus (1–10 uždaviniai).

1.		**6.**	
2.		**7.**	
3.		**8.**	
4.		**9.**	
5.		**10.**	

II dalis

Išspręskite 11–20 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

11. Išspręskite nelygybes:

11.1. $\frac{1}{x-3} \leq 1;$

(3 taškai)

Sprendimas.

1. Randame nelygybės $\frac{1}{x-3} \leq 1$ apibrėžimo sritį: $x-3=0, x=3, x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

2. Pertvarkome nelygybę, suteikdami jai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} \gtreqless 0$:

$$\frac{1}{x-3} \leq 1, \Rightarrow \frac{1}{x-3} - 1 \leq 0, \Rightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \leq 0, \Rightarrow \frac{1-(x-3)}{x-3} \leq 0, \Rightarrow \frac{1-x+3}{x-3} \leq 0, \Rightarrow \frac{4-x}{x-3} \leq 0.$$

3. Išsprendžiame gautą trupmeninę racionaliąją nelygybę.

I būdas. Algebrinis būdas.

$$\frac{4-x}{x-3} \leq 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \leq 0, \\ x-3 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x \geq 0, \\ x-3 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 4, \\ x > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 4, \\ x < 3; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x < 3; \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty).$$

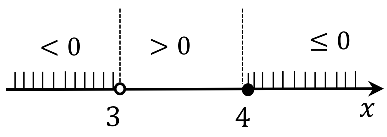
II būdas. Intervalų metodas.

Apskaičiuojame x reikšmes, su kuriomis trupmenos $\frac{4-x}{x-3}$ skaitiklio ir vardiklio reikšmės lygios 0:

$$x-3=0, x=3; \quad 4-x=0, x=4.$$

Gautas x reikšmes ($x=3, x=4$) pažymime skaičių tiesėje ir gautuose skaičių tiesės intervaluose nustatome trupmenos $\frac{4-x}{x-3}$ reikšmių ženklus (randame x reikšmių intervalus, kuriuose trupmenos reikšmės yra mažesnės už 0, bei x reikšmes, su kuriomis trupmenos reikšmė lygi 0):

$\frac{4-x}{x-3}$



Atsakymas. $x \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$

11.1.	Sprendimas (3) Ats.:

Namų darbas

1. Prisiminkite, kaip sprendžiamos trupmeninės racionaliosios lygtys ir nelygybės.

2. Prisiminkite, kaip sprendžiamos iracionaliosios lygtys.

11.2. $\log_2(x+3) > 3$;

(2 taškai)

Sprendimas.

1. Randame nelygybės $\log_2(x+3) > 3$ apibrėžimo sritį: $x+3>0, x>-3, x \in (-3;\ +\infty)$.

2. Išsprendžiame nelygybę:

$$\log_2(x+3) > 3, \Rightarrow \log_2(x+3) > \log_2 8, \Rightarrow \begin{cases} x+3>0, \\ x+3>8; \end{cases} \Rightarrow x+3>8, \Rightarrow x>5, \Rightarrow x \in (5;\ +\infty).$$

Atsakymas. $x \in (5;\ +\infty)$


11.2. Sprendimas (2)

Ats.:

Namų darbas

1. Prisiminkite, kaip sprendžiamos logaritminės lygtys ir nelygybės.

2. Prisiminkite, kaip sprendžiamos rodiklinės lygtys ir nelygybės.

11.3. $\cos x < -\frac{1}{2}$.

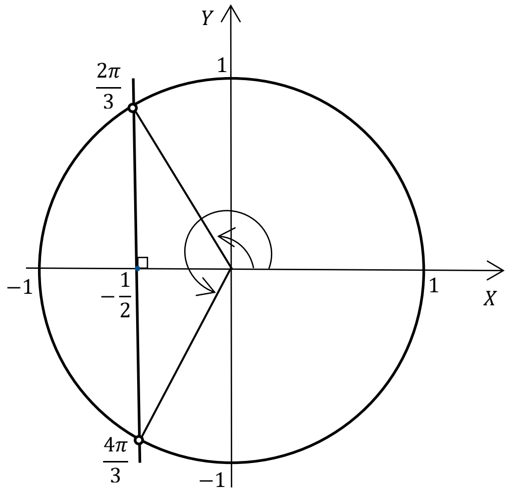
(3 taškai)

Sprendimas.

1. Randame nelygybės $\cos x < -\frac{1}{2}$ apibrėžimo sritį: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2. Randame lygties $\cos x = -\frac{1}{2}$ sprendinius:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



3. Randame nelygybės $\cos x < -\frac{1}{2}$ sprendinius:

I būdas. Naudojamės vienetiniu apskritimu.

$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Atsakymas. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$

II būdas. Naudojamės $y = \cos x$ ir $y = -\frac{1}{2}$ grafikais.

Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižome kosinusoidę $y = \cos x$ ir tiesę $y = -\frac{1}{2}$.

Naudodamiesi paveikslu, nustatome x reikšmių intervalus, kuriuose kosinusoidė yra žemiau už tiesę.

Atsakymas. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$

11.3. Sprendimas (3)

Ats.:

Namų darbas

1. Prisiminkite, kaip sprendžiamos trigonometrinės lygtys ir nelygybės.

2. Prisiminkite, kaip sprendžiamos lygtys ir nelygybės su moduliais.

12. Suprastinkite reiškinį $\sin(\alpha + 3\pi) + \cos(\alpha - 3\pi)$.

(2 taškai)

Sprendimas.

$$\sin(\alpha + 3\pi) + \cos(\alpha - 3\pi) =$$

$$= \sin\big((\alpha + \pi) + 2\pi\big) + \cos\big((\alpha - \pi) - 2\pi\big) =$$

$$= \sin(\alpha + \pi) + \cos(\alpha - \pi) =$$

$$= -\sin(\alpha) - \cos(\alpha).$$

Atsakymas. $-\sin(\alpha) - \cos(\alpha)$


12. Sprendimas (2)

Ats.:

Namų darbas

Išspręskite keletą uždavinių, kuriuose reikia pertvarkyti trigonometrinius reiškinius.

13. Bendrovė „Gražiagirė“ planuoja sutvarkyti 2000 hektarų miško plotą. Pirmaisiais metais bendrovė sutvarkė 12 hektarų miško. Kiekvienais kitais metais bendrovė planuoja sutvarkyti 1,5 karto didesnį plotą negu ji sutvarkė praeitais metais.

13.1. Apskaičiuokite, kiek hektarų miško bendrovė planuoja sutvarkyti 7-taisiais metais. Atsakymą parašykite hektarais vienetų tikslumu.

(2 taškai)

Sprendimas.

I būdas.

Bendrovė 7-taisiais metais planuoja sutvarkyti:

$$12 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 12 \cdot 1{,}5^6 =$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{2167}{16} = 136{,}6875 \approx 137 \text{ (ha).}$$

II būdas. Naudojamės geometrinės progresijos n-tojo nario formule.

$$b_1 = 12, \;\; q = 1{,}5;$$

$$b_7 = b_1 \cdot q^{7-1} = 12 \cdot 1{,}5^6 = 136{,}6875 \approx 137 \text{ (ha).}$$

Atsakymas. 137 ha

13.1.	Sprendimas	(2)
		Ats.:

Namų darbas

1. Prisiminkite aritmetinės ir geometrinės progresijos n-tojo nario formules.

13. Bendrovė „Gražiagirė“ planuoja sutvarkyti 2000 hektarų miško plotą. Pirmaisiais metais bendrovė sutvarkė 12 hektarų miško. Kiekvienais kitais metais bendrovė planuoja sutvarkyti 1,5 karto didesnį plotą negu ji sutvarkė praeitais metais.

13.2. Kiek iš viso hektarų miško bendrovė planuoja sutvarkyti per pirmus 8 metus? Atsakymą parašykite hektarais dešimčių tikslumu.

(2 taškai)

Sprendimas.

Naudojamės geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formule $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$:

$$b_1 = 12, \qquad q = 1{,}5, \qquad n = 8;$$

$$S_8 = \frac{12 \cdot (1{,}5^8 - 1)}{1{,}5 - 1} = 24 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1\right) = 24 \cdot \left(\frac{6561}{256} - 1\right) = 24 \cdot \frac{6305}{256} = \frac{1895}{32} = 591{,}09375 \approx 590 \text{ (ha)}.$$

Atsakymas. 590 ha

13.2. Sprendimas (2)

Ats.:

Namų darbas

1. Prisiminkite aritmetinės ir geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formules.

13. Bendrovė „Gražiagirė“ planuoja sutvarkyti 2000 hektarų miško plotą. Pirmaisiais metais bendrovė sutvarkė 12 hektarų miško. Kiekvienais kitais metais bendrovė planuoja sutvarkyti 1,5 karto didesnį plotą negu ji sutvarkė praeitais metais.

13.3. Per kiek metų bendrovė planuoja sutvarkyti visą 2000 hektarų plotą?

(2 taškai)

Sprendimas.

$$S_n = \frac{12 \cdot (1{,}5^n - 1)}{1{,}5 - 1} = 2000,$$

$$24 \cdot (1{,}5^n - 1) = 2000,$$

$$1{,}5^n = \frac{2000}{24} + 1,$$

$$1{,}5^n = \frac{2024}{24} = \frac{253}{3},$$

$$n = \log_{1{,}5}\left(\frac{253}{3}\right) = 10{,}937 \ldots.$$

Atsakymas. 11 metų


13.3. Sprendimas (2)

Ats.:

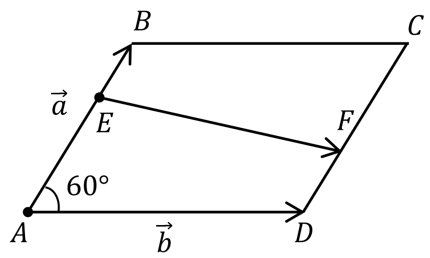
Namų darbas

1. Skaičiuotuvas.

14. Paveiksle pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$, kurio $AB = 3$, $AD = 4$, o $\angle A = 60°$.

Lygiagretainio kraštinėse AB ir DC yra pažymėti taškai E ir F taip, kad $AE:EB = CF:FD = 2:1$.

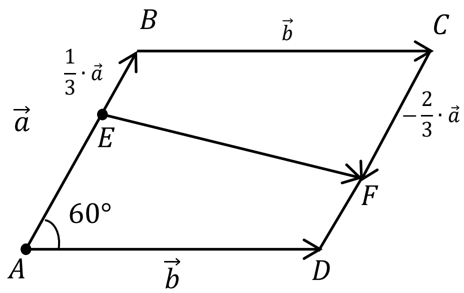
Žinoma, kad $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



14.1. Vektorių $\overrightarrow{EF}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

(2 taškai)

Sprendimas.



1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$.

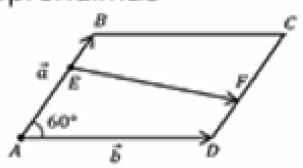
2. $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$,

   $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\cdot(-\vec{a}) = -\frac{2}{3}\cdot\vec{a}$.

3. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \vec{b} + \left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\right) = \vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$.

Atsakymas. $\vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$

14.1. Sprendimas (2)

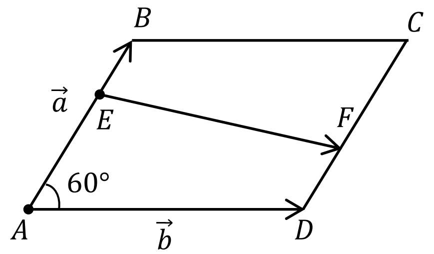


Ats.:

Namų darbas

1. Šį uždavinį reikia mokėti išspręsti.

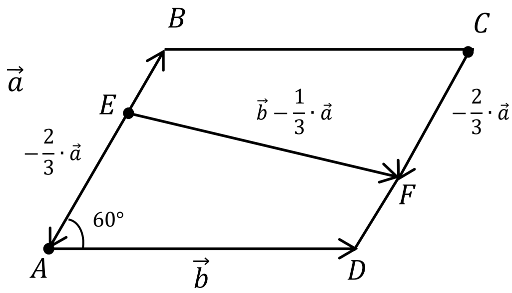
14. Paveiksle pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$, kurio $AB = 3$, $AD = 4$, o $\angle A = 60°$.
Lygiagretainio kraštinėse AB ir DC yra pažymėti taškai E ir F taip, kad $AE{:}EB = CF{:}FD = 2{:}1$.
Žinoma, kad $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



14.1. Vektorių $\overrightarrow{EF}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

14.2. Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{CF}$ skaliarinę sandaugą. *(3 taškai)*
Sprendimas.

I būdas.



1. $\overrightarrow{EF} = \vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA} = -\frac{2}{3}\cdot\vec{a}$.

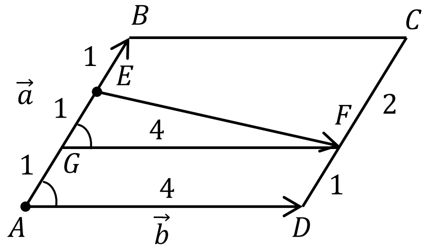
2. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF} = \left(\vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2}{9}\cdot(\vec{a})^2 =$

$= -\frac{2}{3}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle(\vec{a};\vec{b})) + \frac{2}{9}\cdot|\vec{a}|^2 =$

$= -\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot\cos(60°) + \frac{2}{9}\cdot 3^2 = -8\cdot\frac{1}{2} + 2 = -2.$

II būdas. Reikia apskaičiuoti

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF} = \left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|\cdot\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{CF}\right)\right).$$



1. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA}, \left|\overrightarrow{CF}\right| = \left|\overrightarrow{EA}\right| = 2$, $\angle\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{CF}\right) = \angle\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EA}\right) = \angle AEF$.

2. Apskaičiuojame $\left|\overrightarrow{EF}\right|$. Nubrėžiame GF lygiagrečią su AD.

   Nagrinėjame $\triangle\, GEF$: $GE = 1, GF = 4, \angle EGF = 60°$.

   Apskaičiuojame EF ilgį:

$$EF^2 = EG^2 + GF^2 - 2\cdot EG\cdot GF\cdot\cos(\angle EGF),$$

$$EF^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos(60°),\quad EF^2 = 17 - 8\cdot\frac{1}{2},\quad EF^2 = 13,\quad EF = \sqrt{13}.$$

3. Apskaičiuojame $\cos(\angle GEF)$:

$$GF^2 = EG^2 + EF^2 - 2\cdot EG\cdot EF\cdot\cos(\angle GEF),$$

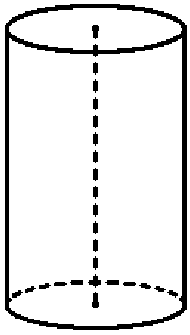
$$4^2 = 1^2 + \sqrt{13}^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{13}\cdot\cos(\angle GEF),\quad \cos(\angle GEF) = -\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

4. Vadinasi,

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF} = \left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|\cdot\cos\left(\angle\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{CF}\right)\right) = \sqrt{13}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right) = -2.$$

Atsakymas. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF} = -2$

15. Ritinio formos uždaros skardinės viso paviršiaus plotas lygus 50 cm^2.



15.1. Ritinio pagrindo spindulio ilgį pažymėję r (cm), parodykite, kad šios ritinio formos skardinės tūrį V (cm^3) galima išreikšti funkcija $V(r) = 25r - \pi r^3$.

(3 taškai)

Sprendimas.

1. Pažymėkime ritinio pagrindo spindulio ilgį r (cm), o ritinio aukštinės ilgį pažymėkime H (cm).
2. Ritinio viso paviršiaus plotas:

$$S_{\text{pav.}} = 2 \cdot S_{\text{pagr.}} + S_{\text{šon.}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 50 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

3. Iš gautos lygybės išsireiškiame H:

$$2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 50,$$

$$\pi r^2 + \pi r \cdot H = 25,$$

$$H = \frac{25 - \pi r^2}{\pi r}.$$

4. Ritinio tūris V:

$$V = S_{\text{pagr.}} \cdot H = \pi r^2 \cdot H = \pi r^2 \cdot \frac{25 - \pi r^2}{\pi r} = r \cdot (25 - \pi r^2) = 25r - \pi r^3.$$

Vadinasi, $V(r) = 25r - \pi r^3$.


15.1. Sprendimas (3)

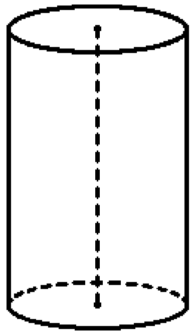
Namų darbas

1. Kūgis.

2. Rutulys.

3. Šį uždavinį būtina mokėti išspręsti.

15. Ritinio formos uždaros skardinės viso paviršiaus plotas lygus 50 cm^2.



15.1. Ritinio pagrindo spindulio ilgį pažymėję r (cm), parodykite, kad šios ritinio formos skardinės tūrį V (cm^3) galima išreikšti funkcija $V(r) = 25r - \pi r^3$.

15.2. Raskite $V'(r)$.

(2 taškai)

Sprendimas.

$$V'(r) = (25r - \pi r^3)' = (25r)' - (\pi r^3)' = 25 - 3\pi r^2.$$

Atsakymas. $V'(r) = 25 - 3\pi r^2$

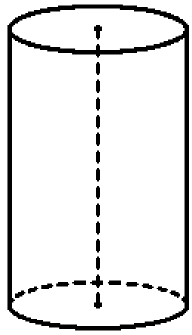
Namų darbas

1. Išvestinių skaičiavimo taisyklės.

15. Ritinio formos uždaros skardinės viso paviršiaus plotas lygus 50 cm^2.

15.1. Ritinio pagrindo spindulio ilgį pažymėję r (cm), parodykite, kad šios ritinio formos skardinės tūrį V (cm^3) galima išreikšti funkcija $V(r) = 25r - \pi r^3$.

15.2. Raskite $V'(r)$.



15.3. Apskaičiuokite didžiausią galimą šios skardinės tūrį. Skaičiuodami vietoje π imkite 3. Atsakymą pateikite vienetų tikslumu.

(4 taškai)

Sprendimas.

1. Randame funkcijos $V(r) = 25r - \pi r^3$ ($r > 0$) kritinius taškus:

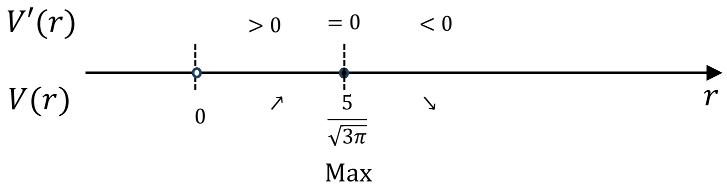
$$V'(r) = 25 - 3\pi r^2,$$

$$25 - 3\pi r^2 = 0,$$

$$r^2 = \frac{25}{3\pi}, \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{\sqrt{3\pi}} \text{ (netinka)}, \quad r = \frac{5}{\sqrt{3\pi}} \text{ – kritinis taškas;}$$

2. Įrodome, kad $r = \frac{5}{\sqrt{3\pi}}$ yra funkcijos $V(r)$ maksimumo taškas.

Pereidama šį tašką funkcijos išvestinė $V'(r)$ keičia pliuso ženklą į minuso ženklą (funkcija iš didėjančiosios pereina į mažėjančiąją):



3. Apskaičiuojame funkcijos $V(r) = 25r - \pi r^3$ reikšmę maksimumo taške. Kai $r = \frac{5}{\sqrt{3\pi}}$, tai

$$V\left(\frac{5}{\sqrt{3\pi}}\right) = 25 \cdot \frac{5}{\sqrt{3\pi}} - \pi \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3\pi}}\right)^3 = \frac{125}{\sqrt{3\pi}} - \frac{125\pi}{3\pi\sqrt{3\pi}} = \frac{125}{\sqrt{3\pi}} - \frac{125}{3\sqrt{3\pi}} = \frac{375-125}{3\sqrt{3\pi}} = \frac{250}{3\sqrt{3\pi}} = \frac{250\sqrt{3\pi}}{9\pi}.$$

4. Vietoje π imame 3:

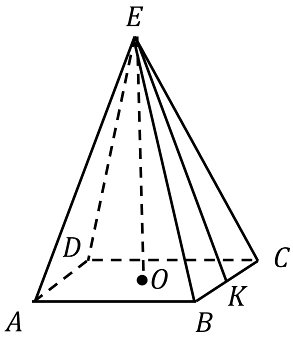
$$V\left(\frac{5}{\sqrt{3\cdot 3}}\right) = V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{250\sqrt{3\cdot 3}}{9\cdot 3} = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9} = 27,(7) \approx 28.$$

Atsakymas. 28 cm^3

Namų darbas

1. Sprendimo 2. punkto schema – būtina.

16. Paveiksle pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė $EABCD$, jos aukštinė EO ir piramidės šoninės sienos EBC aukštinė EK.
Žinoma, kad piramidės pagrindo kraštinės AB ilgis lygus 8 cm, o piramidės šoninės briaunos EB ilgis lygus 10 cm.



16.1. Apskaičiuokite piramidės aukštinės EO ilgį.

(2 taškai)

Sprendimas.

1. Iš stačiojo trikampio EKB ($EB = 10, BK = \frac{8}{2} = 4$) apskaičiuojame EK ilgį.

   Pagal Pitagoro teoremą:

$$EK = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} \text{ (cm).}$$

2. Iš stačiojo trikampio EOK ($EK = \sqrt{84}, OK = \frac{8}{2} = 4$) apskaičiuojame EO ilgį.

   Pagal Pitagoro teoremą:

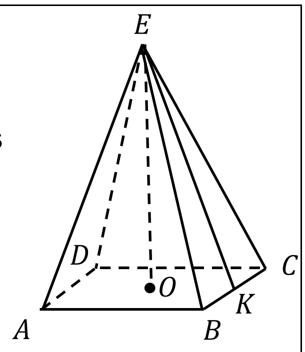
$$EO = \sqrt{84 - 16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ (cm).}$$

Atsakymas. $EO = 2\sqrt{17}$ cm

Namų darbas

1. Taisyklingoji trikampė piramidė; tetraedras.

16. Paveiksle pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė $EABCD$, jos aukštinė EO ir piramidės šoninės sienos EBC aukštinė EK.
Žinoma, kad piramidės pagrindo kraštinės AB ilgis lygus 8 cm, o piramidės šoninės briaunos EB ilgis lygus 10 cm.



16.1. Apskaičiuokite piramidės aukštinės EO ilgį.

16.2. Apskaičiuokite kampo, kurį sudaro šios piramidės šoninė siena EBC su piramidės pagrindu $ABCD$, didumą laipsniais. Atsakymą pateikite dešimtųjų tikslumu.

(2 taškai)

Sprendimas.
1. Kampas tarp plokštumų $ABCD$ ir EBC yra:

$$\angle(ABCD; EBC) = \angle EKO.$$

2. Iš stačiojo trikampio EOK ($EK = \sqrt{84}, OK = \frac{8}{2} = 4, EO = \sqrt{68}$) apskaičiuojame $\angle EKO$ didumą:

$$\frac{OK}{EK} = \cos(\angle EKO), \qquad \cos(\angle EKO) = \frac{4}{\sqrt{84}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21},$$

$$\angle EKO = \arccos\left(\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) = 64{,}123\,...\,° \approx 64{,}1°.$$

Atsakymas. $64{,}1°$

Namų darbas

1. Skaičiuotuvas – kaip rasti kampo didumą, kai žinoma to kampo sinuso, kosinuso ar tangento reikšmė.

17. Kavinėje vyksta reklamos akcija: kiekvienas lankytojas, nusipirkęs kakavos puodelį, iš dėžės atsitiktinai traukia vieną lipduką, kuriame yra nurodyta nuolaida kitam apsilankymui. Dėžėje yra 10 lipdukų su 5 % nuolaida, 6 lipdukai su 10 % nuolaida ir 4 lipdukai, rodantys nemokamą bandelę. Reklamos akcija vyks tol, kol lankytojas ištrauks paskutinį dėžėje esantį lipduką.

17.1. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmasis kavinės lankytojas ištrauks 10 % nuolaidos lipduką.

(1 taškas)

Sprendimas.

$$\mathbf{P}(\text{Pirmasis lankytojas ištrauks 10 \%}) = \frac{6}{10+6+4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{10}$

Namų darbas

1. Mokame tikimybes – surenkame 9 taškus; nemokame tikimybių – prarandame iki 9 taškų.

17. Kavinėje vyksta reklamos akcija: kiekvienas lankytojas, nusipirkęs kakavos puodelį, iš dėžės atsitiktinai traukia vieną lipduką, kuriame yra nurodyta nuolaida kitam apsilankymui. Dėžėje yra 10 lipdukų su 5 % nuolaida, 6 lipdukai su 10 % nuolaida ir 4 lipdukai, rodantys nemokamą bandelę. Reklamos akcija vyks tol, kol lankytojas ištrauks paskutinį dėžėje esantį lipduką.

17.2. Pirmasis lankytojas ištraukė lipduką su 5 % nuolaida (lipdukai į dėžę negrąžinami). Kokia tikimybė, kad antrasis lankytojas ištrauks nemokamos bandelės lipduką?

(2 taškai)

Sprendimas.

Po pirmojo lankytojo dėžėje liko 9 lipdukai su 5 % nuolaida, 6 lipdukai su 10 % nuolaida ir 4 lipdukai, rodantys nemokamą bandelę.

$$\mathbf{P}(\text{Antrasis lankytojas ištrauks bandelės lipduką, jei pirmasis ištraukė 5 \%}) = \frac{4}{9+6+4} = \frac{4}{19}.$$

Atsakymas. $\frac{4}{19}$

17. Kavinėje vyksta reklamos akcija: kiekvienas lankytojas, nusipirkęs kakavos puodelį, iš dėžės atsitiktinai traukia vieną lipduką, kuriame yra nurodyta nuolaida kitam apsilankymui. Dėžėje yra 10 lipdukų su 5 % nuolaida, 6 lipdukai su 10 % nuolaida ir 4 lipdukai, rodantys nemokamą bandelę. Reklamos akcija vyks tol, kol lankytojas ištrauks paskutinį dėžėje esantį lipduką.

17.3. Du draugai vienu metu nusiperka po puodelį kakavos ir abu traukia iš dėžės po vieną nuolaidos lipduką. Kokia tikimybė, kad abu draugai ištrauks lipdukus su vienoda nuolaida, t. y. abu ištrauks lipdukus su užrašyta 5 % nuolaida arba abu ištrauks lipdukus su užrašyta 10 % nuolaida, arba abu ištrauks lipdukus, rodančius nemokamą bandelę?

(3 taškai)

Sprendimas.

I būdas.

$$\mathbf{P}(\text{Abu ištrauks arba 5 \%, arba 10 \%, arba bandelės lipdukus}) =$$

$$= \mathbf{P}((\text{Abu ištrauks 5 \%}) + \mathbf{P}(\text{Abu ištrauks 10 \%}) + \mathbf{P}(\text{Abu ištrauks bandelės lipdukus}) =$$

$$= \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19} + \frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19} = \frac{10\cdot 9 + 6\cdot 5 + 4\cdot 3}{20\cdot 19} = \frac{132}{380} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}.$$

II būdas.

Ištraukti 2 lipdukus iš 20 yra $20\cdot 19$ galimybių (A_{20}^2).

Ištraukti 2 lipdukus su 5 % nuolaida yra $10\cdot 9$ galimybių (A_{10}^2).

Ištraukti 2 lipdukus su 10 % nuolaida yra $6\cdot 5$ galimybių (A_6^2).

Ištraukti 2 lipdukus su nemokama bandele yra $4\cdot 3$ galimybių (A_4^2).

$$\mathbf{P}(\text{Abu ištrauks arba 5 \%, arba 10 \%, arba bandelės lipdukus}) =$$

$$= \frac{10\cdot 9 + 6\cdot 5 + 4\cdot 3}{20\cdot 19} = \frac{132}{380} = \frac{33}{95}.$$

Atsakymas. $\frac{33}{95}$

Namų darbas

Tai labai svarbus uždavinys.

18. Žinoma, kad $a = \log_2 m$ ir $b = \log_m 7$ $(m > 0, m \neq 1)$. Pagrįskite, kad $\log_{14} m = \frac{a}{1+ab}$.

(3 taškai)

Sprendimas.

I būdas.

$$\log_{14} m = \frac{\log_2 m}{\log_2 14} = \frac{a}{\log_2(2\cdot 7)} = \frac{a}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{a}{1 + \log_2 7} = \frac{a}{1 + \frac{\log_m 7}{\log_m 2}} = \frac{a}{1 + \frac{b}{\log_m 2}} = \frac{a}{1 + \frac{b}{\frac{1}{\log_2 m}}} = \frac{a}{1 + b\log_2 m} =$$

$$= \frac{a}{1 + ba} = \frac{a}{1 + ab}.$$

II būdas.

$$\log_{14} m = \frac{\log_m m}{\log_m 14} = \frac{1}{\log_m(2\cdot 7)} = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 m} + b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + b} = \frac{1\cdot a}{\left(\frac{1}{a} + b\right)\cdot a} = \frac{a}{1 + b\cdot a} = \frac{a}{1+ab}.$$

III būdas.

$$\frac{a}{1+ab} = \frac{\log_2 m}{1 + \log_2 m \cdot \log_m 7} = \frac{\frac{\log_{14} m}{\log_{14} 2}}{1 + \frac{\log_{14} m}{\log_{14} 2}\cdot\frac{\log_{14} 7}{\log_{14} m}} = \frac{\frac{\log_{14} m}{\log_{14} 2}}{1 + \frac{\log_{14} 7}{\log_{14} 2}} = \frac{\frac{\log_{14} m}{\log_{14} 2}\cdot \log_{14} 2}{\left(1 + \frac{\log_{14} 7}{\log_{14} 2}\right)\cdot \log_{14} 2} =$$

$$= \frac{\log_{14} m}{\log_{14} 2 + \log_{14} 7} = \frac{\log_{14} m}{\log_{14}(2\cdot 7)} = \frac{\log_{14} m}{1} = \log_{14} m.$$

IV būdas.

1.

$$\log_{14} m = \frac{\log_2 m}{\log_2 14} = \frac{a}{\log_2(2\cdot 7)} = \frac{a}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{a}{1+\log_2 7}.$$

2.

$$a\cdot b = \log_2 m \cdot \log_m 7 = \log_2 m \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 m} = \log_2 7.$$

3.

$$\log_{14} m = \frac{a}{1+\log_2 7} = \frac{a}{1+ab}.$$

Namų darbas

1. Uždavinys, kuriame reikia pertvarkyti logaritmus, galimai gali būti.

19. Įmonėje dirba penki darbuotojai: Lina, Ignas, Vilija, Martynas ir Ona. Žinoma, kad kiekvieno iš jų sudaryto ketverto amžių suma (metais) yra lygi 132, 138, 113, 131 ir 126. Nustatykite, kiek metų yra vyriausiam šios įmonės darbuotojui.

(4 taškai)

Sprendimas.

I būdas.

Visų penkių darbuotojų amžių sumą pažymėkime raide A.

Tada

$$132 + 138 + 113 + 131 + 126 = 4A,$$

nes sumą $132 + 138 + 113 + 131 + 126$ sudaro kiekvieno darbuotojo amžius paimtas 4 kartus.

Iš čia:

$$4A = 640, \quad A = 160.$$

Vadinasi, visų darbuotojų amžių suma lygi 160 metų, o vyriausio darbuotojo amžius lygus $160 - 113 = 47$ metai.

II būdas.

Nurodytų darbuotojų amžių pažymėkime a, b, c, d, e.

Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 132, \\ a + b + c + e = 138, \\ a + b + d + e = 113, \\ a + c + d + e = 131, \\ b + c + d + e = 126. \end{cases}$$

Sudedame sistemos lygtis:

$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e = 640,$$

$$a + b + c + d + e = 160.$$

Apskaičiuojame vyriausio darbuotojo amžių: $160 - 113 = 47$ (metai).

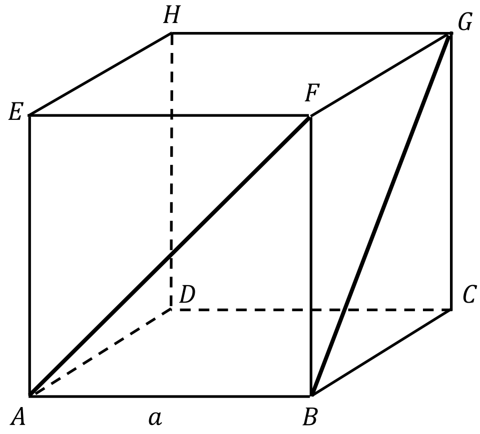
Atsakymas. 47 m.

Namų darbas

1. Galvoti tikrai reikės, bet tokio uždavinio, ko gero, nebus.

20. Paveiksle pavaizduotas kubas $ABCDEFGH$, kurio briaunos ilgis lygus a. Nubrėžtos šio kubo dviejų gretimų sienų įstrižainės AF ir BG. Apskaičiuokite atstumą tarp tiesių AF ir BG.

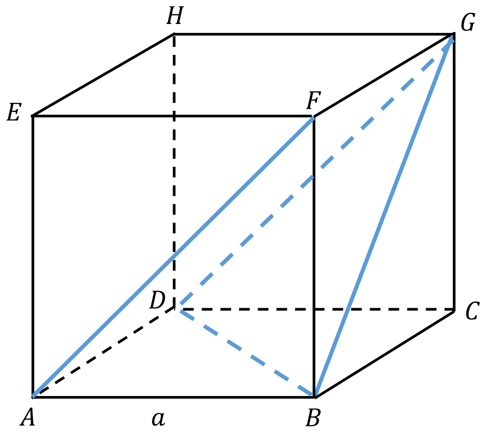
(3 taškai)



Sprendimas.

1. Pavaizduojame kubo pjūvį BGD.

Tiesė AF yra lygiagreti su plokštuma BGD, nes $AF \parallel DG$ ir AF nėra plokštumoje BGD (tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis).



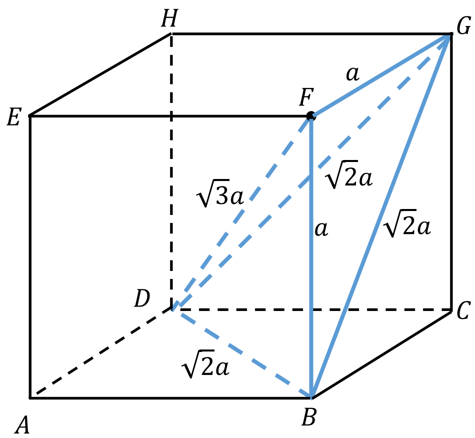
2. Atstumas tarp tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos yra lygus statmens nuo bet kurio tos tiesės taško iki plokštumos ilgiui. Tiesėje AF pasirinkime tašką F ir apskaičiuokime atstumą nuo taško F iki plokštumos BGD. Tas atstumas lygus piramidės $FBGD$ aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės F į pagrindą BGD ilgiui h.

3. Randame piramidės $FBGD$ tūrį dviem būdais:

1) $V_{FBGD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BGD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}a\right)^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a^2 \cdot h;$

2) DC yra piramidės $FBDG$ aukštinė, nubrėžta iš viršūnės D į pagrindą BGF, nes $DC \perp BC, DC \perp CG$ (tiesės ir plokštumos statmenumo požymis), o piramidės tūris

$V_{DFBG} = \frac{1}{3} \cdot S_{FBG} \cdot DC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$



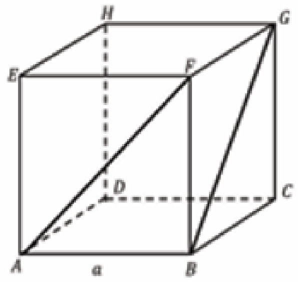
4. Sulyginę gautas tūrio išraiškas, apskaičiuojame h:

$\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a^2 \cdot h = \frac{a^3}{6},\ h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a.$

Vadinasi, atstumas tarp tiesių AF ir BG yra lygus $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Atsakymas. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

20. Sprendimas (3)



Ats.:

Namų darbas

1. Nenustebkite, jei reikės apskaičiuoti atstumą tarp prasilenkiančių teisių – tas tieses jungiančio bendro statmens ilgį.

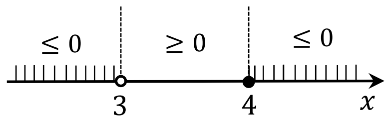
Juodraštis

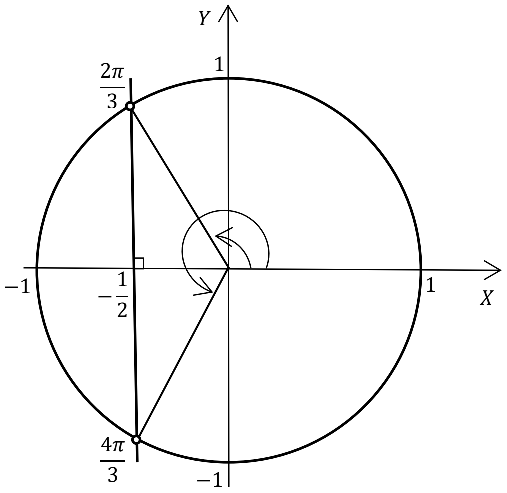
2026 m. MATEMATIKOS IŠPLĖSTINIO KURSO BANDOMOSIOS UŽDUOTIES ANTROS DALIES VERTINIMO INSTRUKCIJA

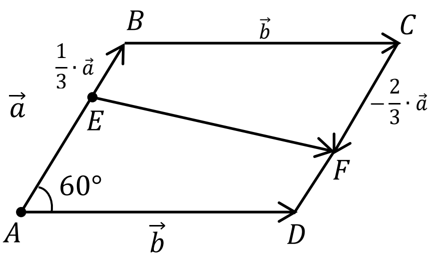
I dalis

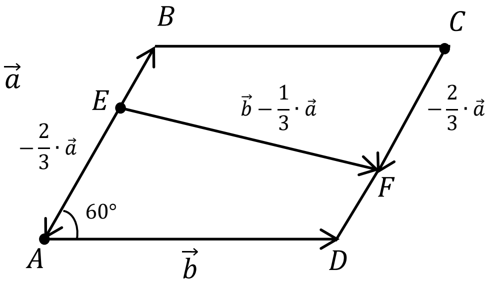
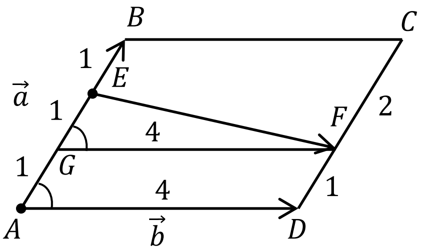
Užd. Nr.	Atsakymas
01.	$[-5;3)\cup[0;2]=[-5;3)$ (arba $[-5;3)$)
02.	$\frac{m}{\sqrt{5}-2}=m\cdot(\sqrt{5}+2)$ (arba $\sqrt{5}m+2m$)
03.	$\mathbf{E}X=\frac{228}{125}$ (arba $1\frac{103}{125}$, arba $1{,}824$)
04.	$(-1;5)$ (arba $x=-1, y=5$)
05.	$\mathbf{P}=\frac{18}{25}$ (arba $\frac{54}{75}$, arba $\frac{648}{900}$, arba $0{,}72$)
06.	$f'(3)=-2$ (arba -2)
07.	$\sin(2\alpha)=-0{,}36$ (arba $-\frac{36}{100}$, arba $-\frac{9}{25}$)
08.	$x=6, y=-4$ (arba $\vec{b}(6;-4)$, arba $\vec{b}=(6;-4)$, arba $(6;-4)$)
09.	25 metrus (arba 25, arba 25 m)
10.	$x\cdot y=5$ (arba 5)

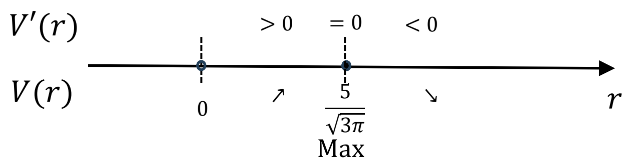
II dalis

<table>
<tr><th>Užd. Nr.</th><th>Sprendimas ir atsakymas</th><th>Taškai</th><th>Vertinimas</th></tr>
<tr><td>11</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>11.1</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{1}{x-3} \leq 1, \Rightarrow \frac{4-x}{x-3} \leq 0;$</td><td>1</td><td>Už teisingai pertvarkytą nelygybę, suteikiant jai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} \lesseqgtr 0$.</td></tr>
<tr><td></td><td>I būdas. Algebrinis būdas.
$\frac{4-x}{x-3} \leq 0, \Rightarrow \begin{cases} 4-x \leq 0, \\ x-3 > 0, \end{cases}$ arba $\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ x-3 < 0; \end{cases}$</td><td>1</td><td>Už teisingai sudarytas dvi nelygybių sistemas.</td></tr>
<tr><td></td><td>$x \geq 4, \qquad x < 3.$
Ats.: $x \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$
(arba $(-\infty; 3), [4; +\infty)$)</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą atsakymą.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Pastaba
Jei teisingai pertvarkyta nelygybė, suteikiant jai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} \lesseqgtr 0$, ir suklysta sudarant kurią nors vieną nelygybių sistemą, bet teisingai sudaryta sistema išspręsta teisingai ir atsakyme nurodytas vienas teisingas sprendinių intervalas, tai iš viso skiriami 2 taškai.</td></tr>
<tr><td></td><td>II būdas. Intervalų metodas.
$x-3=0, x=3; \quad 4-x=0, x=4;$</td><td>1</td><td>Už teisingai nustatytas reikšmes, su kuriomis trupmenos $\frac{4-x}{x-3}$ skaitiklis ir vardiklis lygus 0.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{4-x}{x-3}$ 
Ats.: $x \in (-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$
(arba $(-\infty; 3), [4; +\infty)$)</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą atsakymą, naudojantis skaičių tiese.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Pastabos
1. Jei suklysta neteisingai priskiriant skaičius 3 ir 4 intervalų galams, pvz., pateikiant vieną iš atsakymų:
$x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$, $x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$, $x \in (-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$,
tai iš viso skiriami 2 taškai.
2. Jei suklysta nustatant tinkamus intervalus ir parašant atsakymą $x \in (3; 4]$, tai iš viso skiriami 2 taškai.</td></tr>
<tr><td>11.2</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\log_2(x+3) > 3, \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 > 8; \end{cases}$</td><td>1</td><td>Už teisingą logaritminės nelygybės pakeitimą nelygybių sistema arba tiesine nelygybe.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\begin{cases} x > -3, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow x > 5, x \in (5; +\infty).$
Ats.: $x \in (5; +\infty)$
(arba $(5; +\infty)$, arba $x > 5$)</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą atsakymą.</td></tr>
</table>

11.3		**3**	
	$\cos x = -\frac{1}{2}, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$ **(**Arba $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.)	1	Už lygties $\cos x = -\frac{1}{2}$ sprendinių radimą.
	I būdas. Naudojantis vienetiniu apskritimu. 	1	Už teisingai pažymėtus vienetinio apskritimo taškus, atitinkančius lygties $\cos x = -\frac{1}{2}$ $(x \in (0; 2\pi))$ sprendinius.
	Ats.: $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$ (arba $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
	II būdas. Naudojantis kosinusoide ir tiese $y = -\frac{1}{2}$. Nelygybės sprendiniai yra x reikšmių intervalai, kuriuose kosinusoidė išsidėsčiusi žemiau tiesės.	1	Už teisingai pavaizduotą kosinusoidę ir tiesę $y = -\frac{1}{2}$ bei jų sankirtos taškų abscisių, kai $x \in (0; 2\pi)$, pažymėjimą.
	Ats.: $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$ (arba $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
12		**2**	
	$\sin(\alpha + 3\pi) + \cos(\alpha - 3\pi) = \sin(\alpha + \pi) + \cos(\alpha - \pi) =$ $= -\sin(\alpha) - \cos(\alpha)$.	1	Už teisingai pertvarkytą $\sin(\alpha + 3\pi)$ arba $\cos(\alpha - 3\pi)$.
	Ats.: $-\sin(\alpha) - \cos(\alpha)$	1	Už teisingai gautą atsakymą.
13		**6**	
13.1		**2**	
	$12 \cdot 1{,}5^6 =$	1	Už teisingai sudarytą reiškinį ar formulės panaudojimą.
	$= \frac{2167}{16} = 136{,}6875 \approx 137$ (ha). *Ats.:* 137 ha (arba 137)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

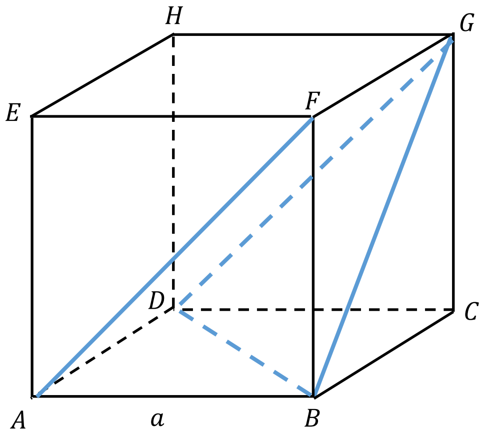
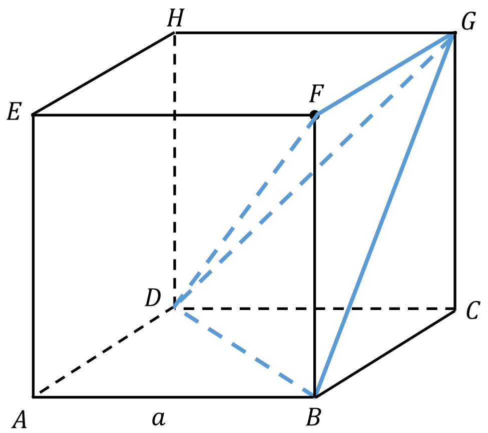
13.2		**2**	
	$S_8 = \frac{12\cdot(1{,}5^8-1)}{1{,}5-1} =$	1	Už teisingą formulės panaudojimą.
	$= 24\cdot(1{,}5^8-1) = 24\cdot\left(\frac{6561}{256}-1\right) = 24\cdot\frac{6305}{256} = \frac{1895}{32} =$ $= 591{,}09375 \approx 590\ (\text{ha}).$ *Ats.:* 590 ha (arba 590)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
13.3		**2**	
	$S_n = \frac{12\cdot(1{,}5^n-1)}{1{,}5-1} = 2000,$	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	$24\cdot(1{,}5^n-1) = 2000, \quad 1{,}5^n = \frac{2024}{24} = \frac{253}{3},$ $n = \log_{1{,}5}\left(\frac{253}{3}\right) = 10{,}937 \ldots$ *Ats.:* 11 metų (arba 11 m., arba 11)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
14.		**5**	
14.1		**2**	
	$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF};$	1	Už teisingą $\overrightarrow{EF}$ išraišką vektoriais, esančiais lygiagretainio kraštinėse.
	 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \vec{b} + \left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\right) = \vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}.$ *Ats.:* $\vec{b} - \frac{1}{3}\cdot\vec{a}$	1	Už teisingai gautą atsakymą.

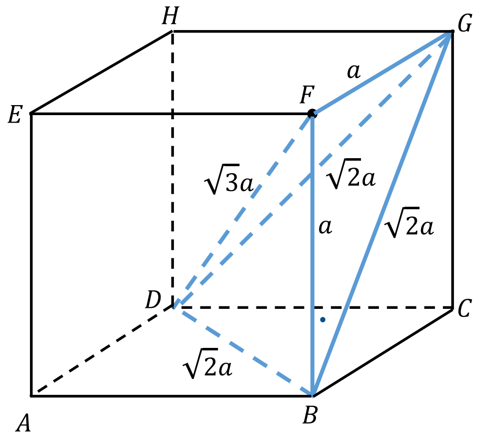
14.2		3	
	I būdas.  $\overrightarrow{EF}=\vec{b}-\frac{1}{3}\cdot\vec{a},\ \ \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}=-\frac{2}{3}\cdot\vec{a};$ $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\vec{b}-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\right)=$ $=-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\cdot(\vec{a})^2=$	1	Už teisingai gautą vektorių $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{CF}$ skaliarinės sandaugos išraišką vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.
	$=-\frac{2}{3}\cdot\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos(\angle(\vec{a};\vec{b}))+\frac{2}{9}\cdot\lvert\vec{a}\rvert^2=$	1	Už teisingą vektorių skaliarinės sandaugos bent vienos formulės pritaikymą.
	$=-\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot\cos(60°)+\frac{2}{9}\cdot 3^2=-8\cdot\frac{1}{2}+2=$ $=-2.$ *Ats.:* $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=-2$ (arba -2)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
	II būdas.  $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\lvert\overrightarrow{EF}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CF}\rvert\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{CF}))=$ $=\lvert\overrightarrow{EF}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{EA}\rvert\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EA}));$	1	Už teisingą vektorių skaliarinės sandaugos formulės pritaikymą.
	$EF^2=EG^2+GF^2-2\cdot EG\cdot GF\cdot\cos(\angle EGF),$ $EF^2=1^2+4^2-2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos(60°),$ $EF=\sqrt{13};$ $GF^2=EG^2+EF^2-2\cdot EG\cdot EF\cdot\cos(\angle GEF),$ $4^2=1^2+\sqrt{13}^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{13}\cdot\cos(\angle GEF),$ $\cos(\angle GEF)=-\frac{\sqrt{13}}{13};$	1	Už teisingai apskaičiuotas EF ir $\cos(\angle GEF)$ reikšmes.
	$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\lvert\overrightarrow{EF}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CF}\rvert\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{CF}))=$ $=\sqrt{13}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)=-2.$ *Ats.:* $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=-2$ (arba -2)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

15		**9**	
15.1		**3**	
	$2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 50,$	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	$H = \frac{25-\pi r^2}{\pi r};$	1	Už teisingą ritinio aukštinės ilgio išraišką.
	$V = \pi r^2 \cdot H = \pi r^2 \cdot \frac{25-\pi r^2}{\pi r} =$ $= r \cdot (25 - \pi r^2) = 25r - \pi r^3.$	1	Už teisingai gautą ritinio tūrio funkciją.
15.2		**2**	
	$V'(r) = (25r - \pi r^3)' = (25r)' - (\pi r^3)' =$ $= 25 - 3\pi r^2.$	1	Už teisingą $25r$ išvestinės radimą arba πr^3 išvestinės radimą.
	Ats.: $V'(r) = 25 - 3\pi r^2$ (arba $25 - 3\pi r^2$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
15.3		**4**	
	I būdas. Naudojamasi ritinio tūrio išvestine: $25 - 3\pi r^2 = 0,\ r^2 = \frac{25}{3\pi},\ \Rightarrow r = -\frac{5}{\sqrt{3\pi}}$ (netinka)$, r = \frac{5}{\sqrt{3\pi}};$	1	Už lygties $V'(r) = 0$ teigiamo sprendinio apskaičiavimą.
		1	Už teisingą tūrio funkcijos maksimumo taško radimą.
	$V\left(\frac{5}{\sqrt{3\pi}}\right) = \frac{250\sqrt{3\pi}}{9\pi}.$	1	Už teisingą tūrio funkcijos maksimumo apskaičiavimą.
	$V\left(\frac{5}{\sqrt{3\cdot 3}}\right) = V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{250\sqrt{3\cdot 3}}{9\cdot 3} = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9} = 27,(7) \approx 28.$ *Ats.:* 28 cm^3 (arba 28)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
	II būdas. Naudojamasi ritinio tūrio funkcijos formule: $V = 25 - 3\pi r^2;$	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	parabolės $V = 25 - 3\pi r^2$ viršūnės abscisė $r = \frac{5}{\sqrt{3\pi}};$	1	Už teisingą tūrio funkcijos maksimumo taško apskaičiavimą.
	parabolės $V = 25 - 3\pi r^2$ viršūnės ordinatė $V = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9} = 27,(7) \approx$	1	Už teisingą tūrio funkcijos maksimumo apskaičiavimą.
	$\approx 28.$ *Ats.:* 28 cm^3 (arba 28)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

16		**4**	
16.1		**2**	
	Iš stačiojo trikampio EKB $(EB = 10, BK = \frac{8}{2} = 4)$: $EK = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84}$ (cm).	1	Už teisingai apskaičiuotą EK ilgį.
	Iš stačiojo trikampio EOK $(EK = \sqrt{84}, OK = \frac{8}{2} = 4)$: $EO = \sqrt{84 - 16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ (cm). *Ats.:* $EO = 2\sqrt{17}$ cm (arba $\sqrt{68}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
16.2		**2**	
	$\angle(ABCD; EBC) = \angle EKO$. Iš stačiojo trikampio EOK $(EK = \sqrt{84}, OK = 4,$ $EO = \sqrt{68})$: $\frac{OK}{EK} = \cos(\angle EKO)$,	1	Už teisingai nurodytą ieškomą kampą arba teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
	$\cos(\angle EKO) = \frac{4}{\sqrt{84}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\angle EKO = \arccos\left(\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) = 64{,}123\ldots° \approx 64{,}1°$. *Ats.:* $64{,}1°$ (arba $64{,}1$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
17		**6**	
17.1		**1**	
	$\mathbf{P} = \frac{6}{10+6+4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. *Ats.:* $\mathbf{P} = \frac{3}{10}$ (arba $0{,}3$, arba $\frac{6}{20}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
17.2		**2**	
	$\mathbf{P} = \frac{4}{9+6+4} = \frac{4}{19}$.	1	Už teisingą trupmenos $\frac{4}{19}$ skaitiklio arba vardiklio nustatymą.
	Ats.: $\frac{4}{19}$ (arba $\mathbf{P} = \frac{4}{19}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
17.3		**3**	
	$\mathbf{P} = \mathbf{P}(10\ \%) + \mathbf{P}(5\ \%) + \mathbf{P}(\text{bandelės})$	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	$= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} + \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} + \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{10 \cdot 9 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{20 \cdot 19} =$	1	Už teisingai apskaičiuotą bent vieną dėmenį.
	$= \frac{132}{380} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}$. *Ats.:* $\frac{33}{95}$ (arba $\mathbf{P} = \frac{33}{95}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

18		**3**	
	$\log_{14} m = \frac{\log_2 m}{\log_2 14} = \frac{a}{\log_2(2\cdot 7)} = \frac{a}{\log_2 2+\log_2 7} = \frac{a}{1+\log_2 7}$,	1	Už teisingą logaritmo pertvarkymą.
	$a \cdot b = \log_2 m \cdot \log_m 7 = \log_2 m \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 m} = \log_2 7$,	1	Už teisingą sandaugos $a \cdot b$ radimą.
	$\log_{14} m = \frac{a}{1+\log_2 7} = \frac{a}{1+ab}$.	1	Už teisingą įrodymą.
19		**4**	
	I būdas. $132 + 138 + 113 + 131 + 126 = 4A$,	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	$A = 160$;	1	Už teisingą visų darbuotojų amžiaus sumos apskaičiavimą.
	$160 - 113 = 47$.	1	Už teisingą vyriausio darbuotojo amžiaus apskaičiavimą.
	Ats.: 47 metai (arba 47)	1	Už teisingai gautą atsakymą.
	II būdas. $\begin{cases} a+b+c+d=132, \\ a+b+c+e=138, \\ a+b+d+e=113, \\ a+c+d+e=131, \\ b+c+d+e=126, \end{cases}$	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.
	$a+b+c+d+e=160$;	1	Už teisingą visų darbuotojų amžiaus sumos apskaičiavimą.
	$160 - 113 = 47$.	1	Už teisingą vyriausio darbuotojo amžiaus apskaičiavimą.
	Ats.: 47 metai (arba 47)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

20		3	
	$AF \parallel BGD$, nes $AF \parallel DG$ ir AF nėra plokštumoje BGD (tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis).  Atstumas tarp AF ir BG yra lygus atstumui tarp AF ir BGD ir yra lygus atstumui tarp F ir BGD ir yra lygus piramidės $FBGD$ aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės F į pagrindą BGD ilgiui h. 	1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą.

	$V_{FBGD}=\frac{1}{3}\cdot S_{BGD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{2}a\right)^2\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot a^2\cdot h;$ $V_{DFBG}=\frac{1}{3}\cdot S_{FBG}\cdot DC=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}.$  	1	Už teisingai nustatytą piramidės tūrį arba teisingai gautą tūrio priklausomybės nuo aukštinės ilgio formulę.
	$\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot a^2\cdot h=\frac{a^3}{6},\ h=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a.$ *Ats.:* $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ (arba $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$, arba $\frac{a}{\sqrt{3}}$)	1	Už teisingai gautą atsakymą.

Nacionalinė švietimo agentūra

ATSAKYMŲ LAPAS

Mokinio klasė

Mokinio vardas ir pavardė

I dalis

Įrašykite tik gautus atsakymus (1–10 uždaviniai).

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

II dalis

Įrašykite sprendimus ir atsakymus (11–20 uždaviniai).

11.1. Sprendimas (3)

Ats.:

11.2. Sprendimas (2)

Ats.:

11.3. Sprendimas (3)

Ats.:

12. Sprendimas (2)

Ats.:

13.1. Sprendimas (2)

Ats.:

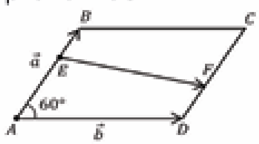
13.2. Sprendimas (2)

Ats.:

13.3. Sprendimas (2)

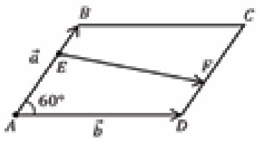
Ats.:

14.1. Sprendimas (2)



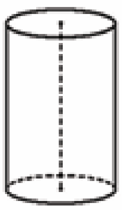
Ats.:

14.2. Sprendimas (3)



Ats.:

15.1. Sprendimas (3)



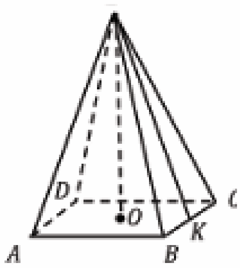
15.2 Sprendimas (2)

Ats.:

15.3 Sprendimas (4)

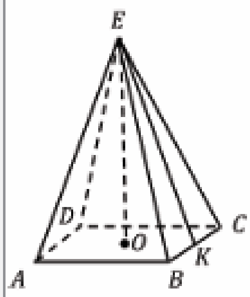
Ats.:

16.1. Sprendimas (2)



Ats.:

16.2. Sprendimas (2)



Ats.:

17.1. Sprendimas (1)

Ats.:

17.2. Sprendimas (2)

Ats.:

17.3. Sprendimas (3)

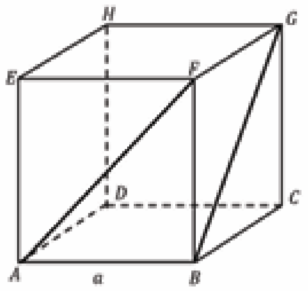
Ats.:

18. Sprendimas (3)

19. Sprendimas (4)

Ats.:

20. Sprendimas (3)



Ats.:

Matematikos išplėstinio (A) kurso VBE antros (II) dalies užduoties matrica

45.8. Matematikos išplėstinio kurso VBE antros dalies, vykdomos baigiamojoje vidurinio ugdymo programos klasėje, užduoties struktūra:

45.8.1. mokymo(si) turinio ir pasiekimų sritys procentais matematikos išplėstinio kurso VBE antros dalies užduotyje:

Mokymo(si) turinio sritys	Pasiekimų sritys			Užduoties taškai procentais
	Žinios, supratimas ir argumentavimas	Matematinis komunikavimas	Problemų sprendimas	
Skaičiai ir skaičiavimai				15
Modeliai ir sąryšiai				50
Geometrija ir matavimai				20
Duomenys ir tikimybės				15
Iš viso taškų procentais	30	45	25	100

Pastaba. Lentelėje pateikti skaičiai yra orientaciniai, užduotyje galima iki 5 procentų paklaida.

45.8.2. užduotis rengiama ir vertinama centralizuotai. Užduotis rengiama remiantis Programos išplėstinio kurso III–IV gimnazijos klasių mokymo(si) turiniu ir pasiekimų lygių požymiais. Užduotį sudaro trumpojo atsakymo ir pilnojo sprendimo uždaviniai ir (ar) klausimai.

Matematikos išplėstinio (A) kurso VBE antros (II) dalies užduoties specifikacija

7.2. Matematikos (A) ir matematikos (B) valstybinių brandos egzaminų antroji dalis.	
7.2.1. Užduoties pobūdis	Užduotį sudaro dvi dalys. I dalis – 10 trumpojo atsakymo uždavinių, kurių teisingas atsakymas vertinamas 1 tašku. Trumpojo atsakymo uždaviniuose reikia įrašyti uždavinio atsakymą (skaičių, kelis skaičius, raidę žodį ir pan.). I dalies taškų suma – 10. II dalis – 7–10 pilno sprendimo uždavinių, iš kurių 5–8 struktūruoti uždaviniai (iš viso 12–18 struktūrinių dalių) ir 2–5 nestruktūruoti uždaviniai. II dalies taškų suma – 50. Uždavinio vertė taškais pateikiama prie kiekvieno uždavinio.
7.2.2. Iš viso taškų	60
7.2.3. Trukmė	240 min.
7.2.4. Užduoties pateikimas	Užduoties sąsiuvinis ir atsakymų lapas.
7.2.5. Priemonės ir priedai	Skaičiuotuvas, matematikos valstybinių brandos egzaminų formulių rinkinys (Aprašo 1 priedas). Reikalavimai skaičiuotuvui nustatyti matematikos (A) ir matematikos (B) valstybinių brandos egzaminų antrosios dalies vykdymo instrukcijose.
7.2.6. Kandidatų atliktų užduočių vertinimas	Centralizuotas. Vertina vertintojai elektroninio vertinimo informacinėje sistemoje.
7.3. Taškų pasiskirstymas procentais pagal kognityvinių gebėjimų sritis	Žinios ir supratimas – 30 proc., taikymas – 55 proc., aukštesnieji mąstymo gebėjimai – 15 proc.
7.4. Taškų pasiskirstymas procentais pagal pasiekimų lygius	Slenkstinis – 35 proc., patenkinamas – 15 proc., pagrindinis – 35 proc., aukštesnysis – 15 proc.

Pastaba. Lentelėje pateikti procentų skaičiai yra orientaciniai, užduotyje galima iki 5 procentų paklaida.

Matematikos išplėstinio (A) kurso VBE formulių rinkinys

1. Greitoji daugyba: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

2. Logaritmai: $a^{\log_a b} = b$, $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$, $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$,

$k\log_a b = \log_a(b^k)$, $\frac{1}{k}\log_a b = \log_{a^k} b$, $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$.

3. Trigonometrija:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$,

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$.

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Jei $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$, tai: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.	Jei $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$, tai: $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.	Jei $\mathrm{tg}\,x = a$, $a \in \mathbb{R}$, tai: $x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $d = a_{n+1} - a_n$, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

čia a_n – n-tasis narys, d – skirtumas, n – nario eilės numeris, S_n – pirmųjų n narių suma.

5. Geometrinė progresija: $b_n = b_1q^{n-1}$, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $S = \frac{b_1}{1-q}$;

čia b_n – n-tasis narys, q – vardiklis ($q \neq 0$), n – nario eilės numeris, S_n – pirmųjų n narių suma, S – nykstamosios geometrinės progresijos suma.

6. Vektoriai: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$;

čia $|\vec{a}|$ – vektoriaus ilgis, $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ir $\vec{b} = (x_2; y_2)$ – vektorių koordinatės, α – kampo tarp vektorių didumas.

7. Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$, $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$,

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$;

čia a, b ir c – trikampio kraštinių ilgiai, $\angle A$, $\angle B$ ir $\angle C$ – prieš jas esančių atitinkamų trikampio kampų didumai, p – trikampio pusperimetris, r – į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis, R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

8. Ritinys: $S_{\text{šon.pav.}} = 2\pi RH$, $V = \pi R^2H$;

čia R – pagrindo spindulio ilgis, H – aukštinės ilgis.

9. Kūgis: $S_{\text{šon.pav.}} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2H$;

čia R – pagrindo spindulio ilgis, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

10. Nupjautinis kūgis: $S_{\text{šon.pav.}} = \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – pagrindų spindulių ilgiai, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

11. Rutulys: $S_{\text{pav.}} = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$;

12. Rutulio nuopjova: $S_{\text{šon.pav.}} = 2\pi RH, \quad V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$;
čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

13. Piramidės tūris: $V = \frac{1}{3}SH$;
čia S – pagrindo plotas, H – aukštinės ilgis.

14. Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$;
čia S_1 ir S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

15. Išvestinės: $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$,
$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$;
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

16. Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, liečiančios funkcijos grafiką taške $\left(x_0; f(x_0)\right)$, lygtis:
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$;
čia $f'(x_0)$ – liestinės krypties koeficientas.

17. Integralai: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$, $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$;
čia C – realusis skaičius.

18. Sukinio tūris: $V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$.

19. Kombinatorika: $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$;
čia C_n^k – derinių skaičius, A_n^k – gretinių skaičius.

20. Atsitiktinis dydis: $\mathbf{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$,
$\mathbf{D}X = (x_1 - \mathbf{E}X)^2p_1 + (x_2 - \mathbf{E}X)^2p_2 + \cdots + (x_n - \mathbf{E}X)^2p_n$;
čia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – atsitiktinio dydžio X reikšmės, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – tų reikšmių tikimybės, $\mathbf{E}X$ – matematinė viltis (vidurkis), $\mathbf{D}X$ – dispersija.

21. Binominiai bandymai: $\mathbf{P}_n(k) = \mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
čia X – atsitiktinis dydis, n – bandymų skaičius, k – sėkmių skaičius, p – sėkmės tikimybė,
$q = 1 - p$ – nesėkmės tikimybė.

22. Niutono binomo formulė: $(a + b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + b^n$.