

## **Konsultacija mokiniams, besirengiantiems laikyti matematikos PUPP:**

- **matematikos PUPP 2025 m. bandomosios užduoties aptarimas**
- **rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

**NŠA  
2025**

## MATEMATIKOS PAGRINDINIO UGDYMO PASIEKIMŲ PATIKRINIMAS

### 2025 m. BANDOMASIS PATIKRINIMAS

Šiandienos patikrinime rasite įvairių uždavinių. Atidžiai perskaitykite kiekvieną uždavinį ir pasistenkite kuo geriau jį išspręsti.

Jei kiltų techninių nesklaidumų arba sistema „pakibtu“, prašytume šiek tiek palaukti ir tęsti darbą, kai tik sistema tai leis.

Patikrinimą sudaro 31 uždavinys.

Patikrinimo taškų suma yra 50 taškų.

**Patikrinimo trukmė – 150 min.**






Spauskite apačioje esančią rodyklę.

**Pasiekimų patikrinime turėsite išspręsti įvairius uždavinius:**

- atsakyti į klausimus su pasirenkamaisiais atsakymais, t. y. pasirinkti vieną arba kelis, jūsų nuomone, teisingus atsakymus;
- užrašyti įrodymą, sprendimą ir atsakymą, t. y. nurodytoje vietoje (teksto laukelyje) užrašyti uždavinio įrodymą ar sprendimą;
- įrašyti skaičių nurodytoje vietoje; skaičius reikia rašyti taisyklingai, t. y. nedėti papildomų tarpų, nerašyti nereikalingų simbolių.

Spauskite apačioje esančią rodyklę.

#### Kas svarbu, atliekant šį pasiekimų patikrinimą

- **Atkreipkite dėmesį!** Kai kurie uždaviniai gali netilpti į kompiuterio langą, todėl peržiūrėkite uždavinį, naudodamiesi vertikalia slankiuoste ar kompiuterio pele.
- Jei norite naudotis skaičiuotuvu, paspauskite viršuje esantį skaičiuotuvo  ženklą.
- Prieš pirmą uždavinį rasite matematikos formulių rinkinį. Juo galite naudotis per visą patikrinimo laiką.
- Pereiti prie tolesnio uždavinio galite spausdami arba apačioje esančią rodyklę , arba lango apačioje esantį reikiamą skrituliuką su skaičiumi.
- Išsprendus uždavinį, jo skrituliukas lango apačioje patamsės. Neišspręsto uždavinio skrituliukas liks baltas.
- Jeigu dėl savo atsakymo abejojate arba uždavinio neišsprendėte, galite paspausti mygtuką  ir pažymėti šį uždavinį, kad prie jo galėtumėte grįžti vėliau.
- Visada galite grįžti prie bet kurio ankstesnio uždavinio ir, jei reikia, atsakymą pataisyti.
- Paspaudę mygtuką  galite bet kuriuo užduoties atlikimo momentu patikrinti, kuriuos uždavinius jau išsprendėte, o kurių dar ne.
- **SVARBU!** Mygtuką  spauskite tik tada, kai būsite tikri, jog norite pateikti visus savo atsakymus vertinti. Paspaudę šį mygtuką, savo atsakymų daugiau taisyti nebegalėsite.

## MATEMATIKOS PAGRINDINIO UGDYMO PASIEKIMŲ PATIKRINIMO FORMULIŲ RINKINYS

### Greitoji daugyba

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

### Laipsniai ir šaknys

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0);$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n : a^m = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad a^n : b^n = (a : b)^n;$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}, \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}, \quad \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}.$$

### Sudėtiniai procentai

$$S_n = S_0 \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n;$$

čia  $S_0$  – dydžio  $S$  pradinė reikšmė,  $p$  – procentų skaičius,  $n$  – kartų skaičius.

### Kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) sprendiniai

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

čia  $D = b^2 - 4ac$ .

### Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ ) skaidymas dauginamaisiais

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

čia  $x_1, x_2$  – kvadratinės lygties  $ax^2 + bx + c = 0$  sprendiniai.

### Tiesės, einančios per taškus $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$ ( $x_1 \neq x_2$ ), lygtis

$$y = kx + b; \quad \text{čia } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

### Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ ) viršūnės abscisė

$$x_{\text{virš.}} = -\frac{b}{2a}.$$

### Trigonometrija

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

|                              |                      |                      |                      |            |                      |                       |                       |
|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\alpha =$                   | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $120^\circ$          | $135^\circ$           | $150^\circ$           |
| $\sin \alpha =$              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         |
| $\cos \alpha =$              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\operatorname{tg} \alpha =$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | –          | $-\sqrt{3}$          | –1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

### Sinusų teorema ir jos išvada

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R;$$

čia  $a, b$  ir  $c$  – trikampio kraštinių ilgiai,  $\angle A, \angle B$  ir  $\angle C$  – prieš jas esančių atitinkamų trikampio kampų didumai,  $R$  – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

### Kosinusų teorema

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A;$$

čia  $a, b, c$  – trikampio kraštinių ilgiai,  $\angle A$  – trikampio kampo, esančio tarp kraštinių, kurių ilgiai  $b$  ir  $c$ , didumas.

**Trikampio plotas**

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R};$$

čia  $a, b, c$  – trikampio kraštinių ilgiai,  $\angle C$  – trikampio kampo, esančio tarp kraštinių, kurių ilgiai  $a$  ir  $b$ , didumas,  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – trikampio pusperimetris,  $h_a$  – ilgis trikampio aukštinės, einančios į kraštinę, kurios ilgis lygus  $a$ ,  $r$  – į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis,  $R$  – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

**Daugiakampio kampų didumų suma**

$$180^\circ \cdot (n - 2);$$

čia  $n$  – daugiakampio kampų skaičius.

**Skritulio išpjovos lanko ilgis**

$$C_{\text{išpj.}} = \frac{2\pi R}{360} \cdot \alpha;$$

čia  $R$  – skritulio spindulio ilgis,  $\alpha$  – išpjovos kampo didumas laipsniais.

**Skritulio išpjovos plotas**

$$S_{\text{išpj.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha;$$

čia  $R$  – skritulio spindulio ilgis,  $\alpha$  – išpjovos kampo didumas laipsniais.

**Užduoties taškų ir įvertinimo balais atitiktis**

| Taškai     | Įvertinimas | Lygis          |
|------------|-------------|----------------|
| 0–7 tšk.   | 1           | Nepatenkinamas |
| 8–12 tšk.  | 2           |                |
| 13–16 tšk. | 3           |                |
| 17–18 tšk. | 4           | Slenkstinis    |
| 19–22 tšk. | 5           | Patenkinamas   |
| 23–25 tšk. | 6           |                |
| 26–33 tšk. | 7           | Pagrindinis    |
| 34–41 tšk. | 8           |                |
| 42–46 tšk. | 9           | Aukštesnysis   |
| 47–50 tšk. | 10          |                |

1. Sekos  $(a_n)$   $n$ -tojo nario formulė yra  $a_n = 2n - 1$ . Apskaičiuokite šios sekos trečiąjį narį  $a_3$ . *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:  $a_3 =$

### Sprendimas.

Sąlygoje duota skaičių sekos  $n$ -ojo nario formulė

$$a_n = 2n - 1.$$

Šios sekos trečiąjį narį  $a_3$  apskaičiuojame formulėje  $n$  reikšmę paėmę lygią 3 ( $n = 3$ ).

Kai  $n = 3$ , tai

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

Atsakymas.  $a_3 = 5$ .

### Komentarai mokiniams.

Skaičių seka gali būti nurodyta:

1. Pateikiant sekos  $n$ -ojo nario formulę, kuria naudojantis galima apskaičiuoti bet kurį sekos narį (taip yra nurodyta sąlygoje duota seka);
2. Surašant sekos narius.

Pavyzdžiui, sąlygoje  $n$ -ojo nario formule pateiktą seką galima nurodyti taip:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

3. Rekurentiškai – pateikiant pirmąjį sekos narį ir formulę, kuria naudojantis iš eilės galima apskaičiuoti antrąjį sekos narį, trečiąjį sekos narį ir t. t.

Pavyzdžiui, sąlygoje nurodytą seką rekurentiškai galima nurodyti taip:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2.$$

Norėdami apskaičiuoti taip nurodytos sekos trečiąjį narį, pirmiausia turime apskaičiuoti antrąjį narį:

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

o tada – trečiąjį narį:

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

4. Šį uždavinį būtina mokėti spręsti. Išspręskite daugiau panašių uždavinių.

### Komentarai mokytojams.

1. Sąlygoje nurodyta seka yra natūraliųjų nelyginių skaičių seka:

$$1, 3, 5, \dots$$

Šios skaičių sekos kiekvienas narys, pradedant antruoju, yra 2 vienetais didesnis už prieš jį esantį narį, todėl ši seka yra aritmetinė progresija, kurios pirmasis narys yra 1 ( $a_1 = 1$ ), o skirtumas lygus 2 ( $d = 1$ ). Aritmetinės progresijos nagrinėjamos III gimnazijos klasėje.

Su mokiniais reikėtų aptarti ir šias sekas:

- Natūraliųjų lyginių skaičių seką: 2, 4, 6, 8, ...; jos  $n$ -ojo nario formulę:  $a_n = 2n$ ; bei šią seką nurodyti rekurentiškai, pvz., taip:  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2$ .

- Natūraliųjų skaičių, didesnių už 1, kartotinių sekas, pavyzdžiui, skaičiaus 3 kartotinių seka yra: 3, 6, 9, 12, ...; jos  $n$ -ojo nario formulė:  $a_n = 3n$ ; šios sekos rekurentinė formulė:  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3$ .
- Natūraliųjų skaičių  $k$ , kuriuos dalijant iš natūraliojo skaičiaus  $d$  gaunama liekana  $l$ , sekas. Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių, kuriuos dalijant iš 5 gaunama liekana lygi 3, seka yra ši:

$$3, 8, 13, 18, \dots;$$

jos  $n$ -ojo nario formulė:

$$a_n = 5(n - 1) + 3 = 5n - 2;$$

šią seką rekurentiškai apibrėžti galima taip:

$$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 5.$$

2. Skaičių seka – tai natūraliojo argumento funkcija (funkcija, kurios nepriklausomojo kintamojo (argumento) reikšmės yra iš eilės einantys natūralieji skaičiai 1, 2, 3, ...).

3. Sąlygojo  $n$ -ojo nario formule nurodytos sekos formulėje

$$a_n = 2n - 1$$

sekos nario numerį  $n$  (nepriklausomąjį kintamąjį (argumentą)) pažymėję  $x$ , o  $n$ -tąjį narį  $a_n$  (priklausomąjį kintamąjį) pažymėję  $y$  turėsime įprastu pavidalu užrašytos tiesinės funkcijos formulę

$$y = 2x - 1.$$

Ši tiesinė funkcija  $y = 2x - 1$  yra apibrėžta, kai  $x \in \mathbb{N}$ . Jei funkcijos reiškinį pavadinsime įprasta raide  $f$ , tai turėsime funkciją  $y = f(x) = 2x - 1$ , kurios apibrėžimo sritis

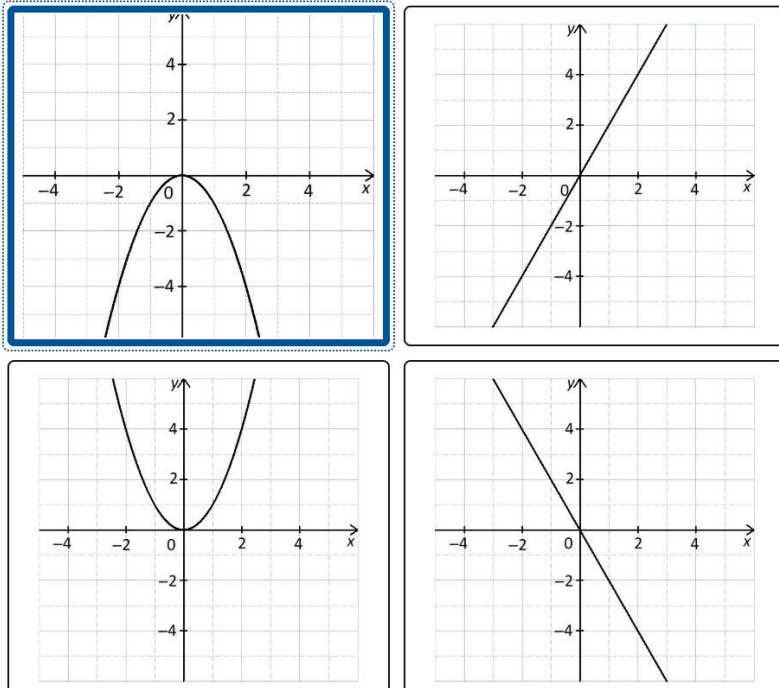
$$D_f = \mathbb{N} \quad (D_f = \{1, 2, 3, \dots\}).$$

Šios funkcijos grafiką sudaro taškai, kurių koordinatės yra

$$(x; f(x)) = (x; 2x - 1) = \{(1; 1), (2; 3), (3; 5), \dots\}, \text{ čia } x \in \mathbb{N}.$$

2. Pažymėkite paveikslą, kuriame pavaizduotas funkcijos  $y = -x^2$  grafikas.

(1 taškas)



### Sprendimas.

Funkcijos  $y = -x^2$  grafikas yra parabolė, nes lygtis  $y = -x^2$  gaunama parabolės lygtyje

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{ paėmus } a = -1, b = 0, c = 0.$$

Parabolės  $y = -x^2$  šakos nukreiptos į apačią, nes  $a = -1 < 0$ .

Parabolė  $y = -x^2$  eina per taškus  $(0; 0)$ ,  $(-1; -1)$ ,  $(1; -1)$ ,  $(-2; -4)$ ,  $(2; -4)$  ir t. t.

Iš pavaizduotų keturių funkcijų grafikų du grafikai yra parabolės (kvadratinių funkcijų grafikai) – jų lygtys yra  $y = -x^2$  ir  $y = x^2$ , o dviejų funkcijų grafikai yra tiesės (tiesinių funkcijų  $y = kx + b$ ,  $b = 0$ , grafikai) – jų lygtys yra  $y = -2x$  ir  $y = 2x$ .

### Komentariai mokiniams.

1. Šį uždavinį reikia mokėti spręsti.

2. Reikia žinoti, kad funkcijos  $y = f(x) = kx + b$  grafikas yra tiesė. Tiesės

$$y = kx + b$$

padėtis koordinatinių plokštumoje priklauso nuo  $k$  ir  $b$  reikšmių.

Skaičius  $k$  nurodo tiesės kryptį:

- kai  $k > 0$ , tai tiesė kyla į viršų (žiūrint iš kairės į dešinę),
- kai  $k < 0$ , tai tiesė leidžiasi į apačią (žiūrint iš kairės į dešinę),
- kai  $k = 0$ , tai tiesė yra lygiagreti abscisių ( $Ox$ ) ašiai; tos tiesės lygtis yra  $y = b$ .

Skaičius  $b$  nurodo, kuriame taške tiesė  $y = kx + b$  kerta ordinačių ( $Oy$ ) ašį – šio taško koordinatės  $(0; b)$ .

Kai  $k = 0$  ir  $b = 0$ , tai tiesės lygtis yra  $y = 0$ , – ši tiesė sutampa su abscisių ( $Ox$ ) ašimi.

Tiesė  $y = kx + b$  abscisių ( $Ox$ ) ašį kerta taške  $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$ .

3. Reikia žinoti, kad funkcijos  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) grafikas yra parabolė. Parabolės

$$y = ax^2 + bx + c$$

padėtis koordinačių plokštumoje priklauso nuo  $a$ ,  $b$  ir  $c$  reikšmių.

Skaičius  $a$  nurodo parabolės šakų kryptį:

- kai  $a > 0$ , tai parabolės šakos nukreiptos į viršų,
- kai  $a < 0$ , tai parabolės šakos nukreiptos į apačią.

Skaičius  $c$  nurodo, kuriame taške parabolė kerta ordinačių ( $Oy$ ) ašį – šio taško koordinatės  $(0; c)$ .

Parabolės viršūnės abscisė (koordinatė  $x$ ) yra  $x = -\frac{b}{2a}$  – ši formulė pateikta formulių rinkinyje.

Parabolė kerta abscisių ( $Ox$ ) ašį taškuose, kurių  $x$  koordinatės yra lygties  $ax^2 + bx + c = 0$  sprendiniai.

3. Būtina mokėti nustatyti, ar duotas taškas (kai duotos jo koordinatės) priklauso funkcijos grafikui (kai duota funkcijos formulė).

4. Kai žinoma funkcijos  $y = f(x)$  formulė arba funkcijos grafikas, tai būtina mokėti apskaičiuoti (nustatyti) funkcijos reikšmę  $y$ , kai žinoma funkcijos argumento reikšmė  $x$ ; ir atvirkščiai – reikia mokėti apskaičiuoti (nustatyti) funkcijos argumento reikšmę  $x$ , kai žinoma funkcijos reikšmė  $y$ .

### Komentarai mokytojams.

1. Iš pavaizduotų keturių funkcijų grafikų du grafikai yra parabolės (kvadratinių funkcijų grafikai) – jų lygtys yra  $y = -x^2$  ir  $y = x^2$ , o dviejų funkcijų grafikai yra tiesės (tiesinių funkcijų  $y = kx + b$ ,  $b = 0$ , grafikai) – jų lygtys yra  $y = -2x$  ir  $y = 2x$ .

2. Parabolės  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) forma ir padėtis priklauso nuo koeficientų  $a$ ,  $b$  ir  $c$  reikšmių:

- kai  $a < 0$ , tai parabolės šakos nukreiptos į apačią,
- kai  $a > 0$ , tai parabolės šakos nukreiptos į viršų,
- didėjant  $a$  reikšmei (nuo 0 į  $+\infty$ ; nuo  $-\infty$  iki 0) parabolės šakos artėja viena prie kitos (glaudžiasi),
- mažėjant  $a$  reikšmei ( $+\infty$  iki 0; nuo 0 į  $-\infty$ ) parabolės šakos tolsta viena nuo kitos (skečiasi),
- keičiantis  $b$  reikšmei parabolės forma ir šakų kryptis nesikeičia, o keičiasi parabolės padėtis – parabolės viršūnė juda parabole),
- $c$  reikšmė reiškia taško, kuriame parabolė kerta ordinačių ašį, koordinatę  $y$ .

3. Būtų gerai, kad šį uždavinį mokėtų spręsti visi mokiniai.

4. Pravartu priminti mokinimas, kad reiškinyje  $-x^2$  nėra pakeltas kvadratu:

- $-x^2 = -1 \cdot x^2$
- Kai  $x = -1$ , tai  $-x^2 = -(-1)^2 = -1$ .

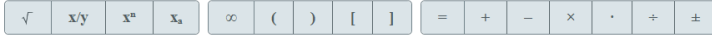
3. Duota kvadratinė lygtis  $x^2 - 12x + 27 = 0$ .

3.1. Naudodamiesi kvadratinės lygties diskriminanto formule, parodykite, kad šios lygties diskriminantas  $D$  lygus 36.

(1 taškas)

Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Sprendimas:



$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 144 - 108 = 36.$$

### Sprendimas.

Irodymas, kad lygties  $x^2 - 12x + 27 = 0$  diskriminantas  $D = 36$ , pateiktas uždavinio sprendimo lauke.

### Komentarai mokiniams ir mokytojams.

1. Lygtis

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

gauta kvadratinėje lygtyje  $ax^2 + bx + c = 0$  (tai standartinis kvadratinės lygties pavidalas) paėmus

$$a = 1, b = -12, c = 27.$$

Iš tikrųjų:

$$x^2 - 12x + 27 = 1 \cdot x^2 + (-12) \cdot x + 27.$$

Standartiniu pavidalu užrašytos kvadratinės lygties diskriminantas yra skaičius  $D = b^2 - 4ac$ .

2. Apskaičiuojant lygties  $x^2 - 12x + 27 = 0$  diskriminantą  $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27$ , koeficiento  $b$  reikšmę būtina apskliausti, nes ji yra neigiama:

$$(-12)^2 = (-12) \cdot (-12) = 144.$$

(O neapskliaudus, gautume  $-12^2 = -1 \cdot 12^2 = -1 \cdot 12 \cdot 12 = -144$ .)

3. Šį uždavinį būtina mokėti spręsti.

3.2. Naudodamiesi kvadratinės lygties sprendinių formulėmis, apskaičiuokite šios lygties sprendinius. *Pateikite sprendimą ir atsakymą.*

(2 taškai)

*Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.*

Sprendimas:

$$\sqrt{\quad} \quad x/y \quad x^n \quad x_s \quad \infty \quad ( \quad ) \quad [ \quad ] \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

$$x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12-6}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Atsakymas:

$$\sqrt{\quad} \quad x/y \quad x^n \quad x_s \quad \infty \quad ( \quad ) \quad [ \quad ] \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

$$x_1 = 3, x_2 = 9.$$

### Sprendimas.

Lygties  $x^2 - 12x + 27 = 0$  sprendiniai apskaičiuoti uždavinio sprendimo lauke.

Atsakymas.  $x_1 = 3, x_2 = 9$ .

### Komentaras mokiniams.

1. Šį uždavinį būtina mokėti spręsti.

2. Jei diskriminanto reikšmė yra:

- neigiama, tai kvadratinė lygtis sprendinių neturi,
- lygi nuliui, tai kvadratinė lygtis turi vieną sprendinį,
- teigiama, tai kvadratinė lygtis turi du sprendinius.

3. Numeruoti kvadratinės lygties sprendinius nėra būtina (nebūtina rašyti  $x_1 = 3, x_2 = 9$ ; arba  $x_1 = 9, x_2 = 3$ ) – galima rašyti taip:  $x = 3, x = 9$ .

### Komentaras mokytojams.

1. Lygties  $x^2 - 12x + 27 = 0$  sprendinių apskaičiavimą galima surašyti ir taip:

$$x^2 - 12x + 27 = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12-6}{2} = \frac{6}{2} = 3, \\ x = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9; \end{cases}$$

arba taip:

$$x^2 - 12x + 27 = 0, \Rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = \frac{12-6}{2} = \frac{6}{2} = 3, \\ x = \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9. \end{cases}$$

2. Numeruoti lygties sprendinius nėra būtina (nebūtina rašyti  $x_1 = 3, x_2 = 9$ ; arba  $x_1 = 9, x_2 = 3$ ) – galima rašyti taip:  $x = 3, x = 9$ ; arba taip: 3; 9 – šiuo atveju sprendinius vertėtų atskirti kabliataškiu.

4. Nustatykite, kuri skaičių pora yra vienas iš lygčių sistemos  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18 \end{cases}$  sprendinių. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

- (6; 3)   
 (3; 6)   
 (2; 5)   
 (5; 2)

### Sprendimas.

Tikriname, kuri iš nurodytų skaičių porų yra abiejų lygčių sprendiniai (poroje pirmasis skaičius yra lygčių nežinomojo  $x$  reikšmė, o antrasis skaičius –  $y$  reikšmė):

- kai  $x = 6, y = 3$ , tai  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 3 = 3, - \text{lygybė teisinga,} \\ 6 \cdot 3 = 18, - \text{lygybė teisinga;} \end{cases} \Rightarrow$   
abi sistemos lygybės yra teisingos, todėl skaičių pora (6; 3) yra lygčių sistemos sprendinys.

Atsakymas. (6; 3).

### Komentarai mokiniams.

- Sąlygoje nurodyta, kad reikia nustatyti, kuri viena iš keturių pateiktų skaičių porų yra duotos lygčių sistemos sprendinys. Tai geriausia padaryti tikrinant pateiktas skaičių poras (sistemos spręsti nereikia).
- Radus sistemos sprendinį (skaičių porą, su kuria sistemos abi lygtys tampa teisingomis lygybėmis), kitų pateiktų nepatiktų porų tikrinti nebūtina.
- Šį uždavinį būtina mokėti spręsti.

### Komentarai mokytojams.

1. Sąlygoje nurodyta nustatyti, kuri viena iš keturių pateiktų skaičių porų yra duotos lygčių sistemos sprendinys. Radus sprendinį, kitų pateiktų nepatiktų porų tikrinti nebūtina, bet pravartu įsitikinti, ar tarp pateiktų kitų skaičių porų, nėra lygčių sistemos sprendinių. Iš tikrųjų:

- kai  $x = 3, y = 6$ , tai  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 6 = 3, - \text{lygybė neteisinga,} \\ 3 \cdot 6 = 18, - \text{lygybė teisinga;} \end{cases} \Rightarrow$   
pirmoji sistemos lygybė yra neteisinga, todėl skaičių pora (3; 6) nėra lygčių sistemos sprendinys;
- kai  $x = 2, y = 5$ , tai  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 5 = 3, - \text{lygybė neteisinga,} \\ 2 \cdot 5 = 18, - \text{lygybė neteisinga;} \end{cases} \Rightarrow$   
abi sistemos lygybės yra neteisingos, todėl skaičių pora (2; 5) nėra lygčių sistemos sprendinys;
- kai  $x = 5, y = 2$ , tai  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 2 = 3, - \text{lygybė teisinga,} \\ 5 \cdot 2 = 18, - \text{lygybė neteisinga;} \end{cases} \Rightarrow$   
antroji sistemos lygybė yra neteisinga, todėl skaičių pora (5; 2) nėra lygčių sistemos sprendinys.

2. Duotoji lygčių sistema turi du sprendinius. Juos apskaičiuoti galima naudojantis keitimo būdu:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ (y + 3) \cdot y = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ y^2 + 3y - 18 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ y_1 = -6, y_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 + 3 = -3, \\ x_2 = 3 + 3 = 6, \\ y_1 = -6, y_2 = 3. \end{cases}$$

Vadinasi, duotoji lygčių sistema turi du sprendinius (−3; −6) ir (6; 3).

5. Paveiksle pavaizduotas funkcijos  $y = f(x)$  grafikas, kai  $x \in [-5; 6]$ . Naudodamiesi grafike pateiktais duomenimis, atlikite užduotis. *Jrašykite atsakymus.*

5.1. Raskite  $f(-1)$  reikšmę.

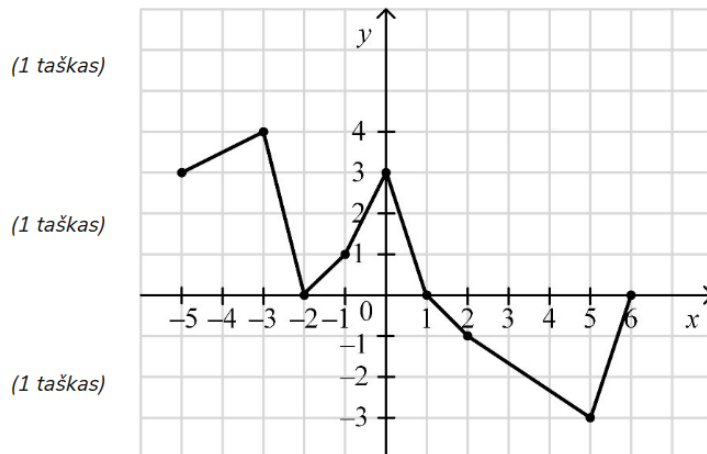
Atsakymas:  $f(-1) =$

5.2. Nustatykite, su kuria  $x$  reikšme  $f(x) = -3$ .

Atsakymas:  $x =$

5.3. Užrašykite didžiausią funkcijos  $y = f(x)$  reikšmę.

Atsakymas:  $y =$



### Sprendimas.

5.1. Naudodamiesi grafiku randame grafiko taško, kurio abscisė lygi  $-1$  (koordinatė  $x = -1$ ) ordinatę (koordinatę  $y$ ):  $y = 1$ .

Atsakymas.  $f(-1) = 1$ .

5.2. Naudodamiesi grafiku randame grafiko taško, kurio ordinatė lygi  $-3$  (koordinatė  $y = -3$ ) abscisę (koordinatę  $x$ ):  $x = 5$ .

Atsakymas.  $x = 5$ .

5.3. Naudodamiesi grafiku randame grafiko aukščiausiai esančio taško ordinatę (koordinatę  $y$ ):  $y = 4$ .

Atsakymas.  $y = 4$ .

### Komentarai mokiniams ir mokytojams.

1. Šį uždavinį būtina mokėti spręsti.

2. Pravartu gebėti nurodyti funkcijos:

- reikšmių sritį:

$$y \in [-3; 4], \text{ arba } E_f = [-3; 4];$$

- $x$  reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmės yra teigiamos:

$$y > 0, \text{ kai } x \in [-5; -2), (-2; 1);$$

- nulius:

$$y = 0, \text{ kai } x = -2; 1; 6;$$

- apibrėžimo srities intervalus, kuriuose funkcija yra didėjančioji:

$$y \nearrow, \text{ kai } x \in (-5; -3), (-2; 0), (5; 6);$$

- mažiausią reikšmę ir ją atitinkančią argumento reikšmę:

$$y = -3, \text{ kai } x = 5.$$

6. Nustatykite, su kuria  $x$  reikšme reiškinys  $\frac{2-x}{x-1}$  neturi prasmės. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

2    0    -1    1

### Sprendimas.

Reiškinys  $\frac{2-x}{x-1}$  neturi prasmės su tomis reiškinio kintamojo  $x$  reikšmėmis, su kuriomis reiškinio vardiklio reikšmė lygi 0:

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Atsakymas.  $x = 1$ .

### Komentaras mokiniams.

Nustatyti teisingą atsakymą galima tikrinant pateiktas  $x$  reikšmes (nesprendžiant lygties  $x - 1 = 0$ ):

- kai  $x = 2$ , tai trupmenos vardiklis nelygus 0, nes  $2 - 1 = 1$ , – trupmena turi prasmę;
- kai  $x = 0$ , tai trupmenos vardiklis nelygus 0, nes  $0 - 1 = -1$ , – trupmena turi prasmę;
- kai  $x = -1$ , tai trupmenos vardiklis nelygus 0, nes  $-1 - 1 = -2$ , – trupmena turi prasmę;
- kai  $x = 1$ , tai trupmenos vardiklis lygus 0, nes  $1 - 1 = 0$ , – trupmena neturi prasmės.

### Komentarai mokytojams.

1. Trupmena neturi prasmės, kai trupmenos vardiklis lygus 0. Pavyzdžiui, trupmena  $\frac{a}{b}$  turi prasmę su visomis trupmenos skaitiklio  $a$  reikšmėmis ( $a \in \mathbb{R}$ ) ir su visomis trupmenos vardiklio  $b$  nelygiomis 0 reikšmėmis ( $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $b \neq 0$ ). Sakoma, kad trupmena  $\frac{a}{b}$  apibrėžta su visomis trupmenos kintamųjų  $a$  ir  $b$  reikšmėmis, išskyrus  $b = 0$ .

2. Trupmenos  $\frac{a}{b}$  reikšmė lygi 0, kai trupmenos skaitiklio reikšmė lygi 0, o vardiklio reikšmė nelygi 0:

$$\frac{a}{b} = 0, \text{ kai } a = 0, b \neq 0.$$

t. y.:

$$\frac{a}{b} = 0, \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b \neq 0. \end{cases}$$

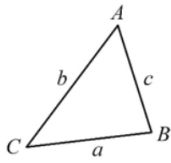
3. Reikia mokiniams priminti dar vieną su reiškinio apibrėžimo sritimi susijusį atvejį:

$\sqrt{f(x)}$  turi prasmę, kai pošaknis yra neneigiamas:  $f(x) \geq 0$ .

Kitai sakant, reiškinys  $\sqrt{f(x)}$  neturi prasmės su tomis kintamojo  $x$  reikšmėmis, su kuriomis pošaknio reikšmės yra neigiamos, t. y.:

$\sqrt{f(x)}$  neturi prasmės, kai  $f(x) < 0$ .

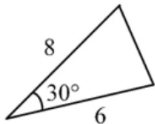
7. 1 paveiksle pavaizduoto trikampio plotas  $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle C$ .



1 pav.

Naudodamiesi 2 paveiksle pateiktais duomenimis, apskaičiuokite jame pavaizduoto trikampio plotą. *Jrašykite atsakymą.*

(1 taškas)



2 pav.

Atsakymas:

### Sprendimas.

Pavaizduoto trikampio plotas  $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin(30^\circ) = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ .

Atsakymas. 12.

**Komentaras mokiniams.** Šio uždavinio nemokėti spręsti negalima.

### Komentarai mokytojams.

1. Formulė, kuria naudojantis buvo apskaičiuotas trikampio plotas, vadinama trigonometriniu trikampio ploto formule. Svarbu, kad mokiniai gebėtų ją įrodyti. Ji įrodoma:

- naudojantis pagrindine trikampio ploto formule – trikampio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugos pusei;
- naudojantis teiginiu, kad stačiojo trikampio statinis lygus įžambinės ilgio ir sinuso kampo prieš tą statinį sandaugai (smailiojo kampo sinuso samprata).

2. Trigonometrinės trikampio ploto formulės  $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ , čia  $a$  ir  $b$  – trikampio kraštinių ilgių,  $\gamma$  – trikampio kampo tarp tų kraštinių didumas, įrodymas:

- iš trikampio viršūnės, esančios prieš kraštinę, kurios ilgis lygus  $a$ , brėžiame trikampio aukštinę – jos ilgį pažymime  $h$ ;
- iš gauto stačiojo trikampio, kurio įžambinės ilgis lygus  $b$ , vieno statinio ilgis lygus  $h$ , o kampo prieš tą statinį didumas lygus  $\gamma$ , randame  $h$ :

$$\frac{h}{b} = \sin(\gamma), \Rightarrow h = b \cdot \sin(\gamma);$$

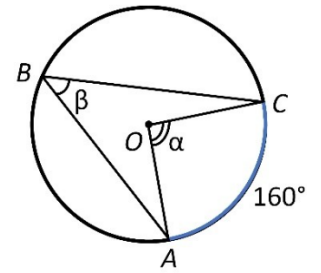
- randame trikampio plotą:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma).$$

*Įrodyta.*

8. Paveiksle pavaizduoto apskritimo centras yra taškas  $O$ . Taškai  $A$ ,  $B$  ir  $C$  priklauso apskritimui. Nuspalvinto apskritimo lanko  $AC$  didumas yra  $160^\circ$ . Nustatykite kampų  $\alpha$  ir  $\beta$  didumus. *Jrašykite atsakymą į reikiamus langelius.*

(2 taškai)



Atsakymas:  $\alpha =$    $^\circ$ ,  $\beta =$    $^\circ$

### Sprendimas.

Kampas  $COA$  yra centrinis kampas, nes jo viršūnė yra apskritimo centro taškas. Centrinio kampo didumas lygus apskritimo lanko ( $\widehat{AC}$ ), į kurį remiasi centrinis kampas, didumui, todėl

$$\angle COA = \alpha = 160^\circ.$$

Kampas  $CBA$  yra įbrėžtinis kampas, nes jo viršūnė yra apskritimo taškas. Įbrėžtinio kampo didumas lygus apskritimo lanko, į kurį remiasi įbrėžtinis kampas, didumo pusei, todėl

$$\angle CBA = \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Atsakymas.  $\alpha = 160^\circ$ ,  $\beta = 80^\circ$ .

**Nurodymas mokiniams.** Šį uždavinį privalu mokėti spręsti.

### Komentarai mokytojams.

1. Teiginio „Įbrėžtinio kampo didumas lygus jį atitinkančio centrinio kampo didumo pusei“ įrodymo galima nenagrinėti.

2. Apskritimo lanko didumą galima reikšti ne tik įprastais ilgio vienetais (mm, cm, ...), bet ir tą lanką atitinkančio centrinio kampo didumu (kampų didumai reiškiami laipsnių skaičiumi).

3. Svarbu, kad mokiniai žinotų teiginius:

- „Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į apskritimo skersmenį, yra status“,
- „Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį apskritimo lanką, yra lygūs“

ir gebėtų jais remtis sprenddami uždavinius.

9. Nustatykite smailiojo kampo  $A$  didumą, jei  $\cos \angle A = 0,5$ . Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas:  $\angle A =$    $^\circ$

### Sprendimas.

Kai  $\cos(\angle A) = 0,5$ , o  $0^\circ < \angle A < 90^\circ$ , tai  $\angle A = 60^\circ$ .

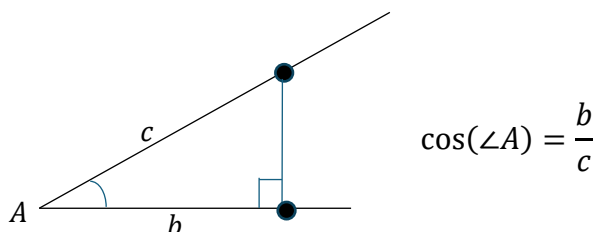
Atsakymas.  $\angle A = 60^\circ$ .

**Nurodymas mokiniams.** Šį uždavinį būtina mokėti spręsti naudojantis lentele ir naudojantis skaičiuotuvu (skaičiuotuvą reikia perjungti į laipsnių režimą „deg“).

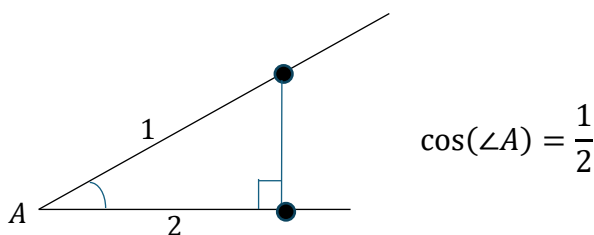
### Komentarai mokytojams.

Smailiojo kampo didumą, kai žinoma to kampo sinuso, kosinuso ar tangento reikšmė, galima apskaičiuoti naudojantis stačiuoju trikampiu.

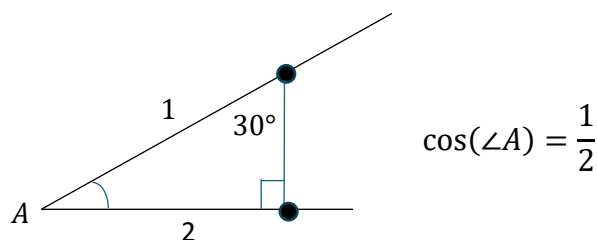
1. Kam lygu  $\angle A$ , kai  $\cos(\angle A) = 0,5$ ? Naudojamės stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinuso samprata.



Kai  $\cos(\angle A) = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ , tai naudodamiesi stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinuso samprata žinome, kad statinio, esančio prie to kampo, ilgio ir įžambinės ilgio santykis lygus  $\frac{1}{2}$ , – vadinasi, jei įžambinės ilgis lygus 1, tai statinio (esančio prie kampo  $A$ ) ilgis lygus 2, t. y. tas statinis yra dvigubai trumpesnis už įžambinę.

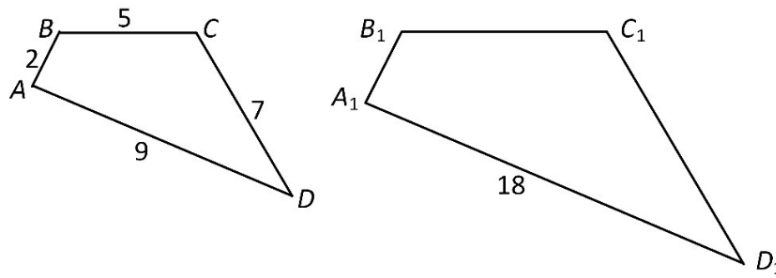


Jei stačiojo trikampio statinis yra dvigubai trumpesnis už įžambinę, tai trikampio smailiojo kampo, esančio prieš tą statinį, didumas lygus  $30^\circ$ , o kampo, esančio prie to statinio, didumas lygus  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Vadinasi,  $\angle A = 60^\circ$ .



2. Ieškomą kampo didumą galima rasti ir naudojantis trigonometrinių reikšmių lentele bei skaičiuotuvu.

10. Paveiksle pavaizduoti keturkampiai  $ABCD$  ir  $A_1B_1C_1D_1$  yra panašieji. Keturkampio  $A_1B_1C_1D_1$  ilgiausios kraštinės  $A_1D_1$  ilgis lygus 18. Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, atlikite užduotis. *Irašykite atsakymus.*



10.1. Kiek kartų keturkampio  $A_1B_1C_1D_1$  kraštinės ilgesnės už atitinkamas keturkampio  $ABCD$  kraštines?

(1 taškas)

Atsakymas:  kart.

10.2. Keturkampio  $ABCD$  perimetras yra 23. Apskaičiuokite keturkampio  $A_1B_1C_1D_1$  perimetrą.

(1 taškas)

Atsakymas:

**Sprendimas.**

10.1. Randame keturkampių atitinkamų kraštinių porą, kurios abiejų kraštinių ilgiai yra žinomi:

$$AD = 9, A_1D_1 = 18.$$

Apskaičiuojame keturkampių panašumo koeficientą:

$$k = \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{18}{9} = 2.$$

Vadinasi, keturkampio  $A_1B_1C_1D_1$  kraštinės yra dvigubai ilgesnės už atitinkamas keturkampio  $ABCD$  kraštines.

Atsakymas. 2 kartus.

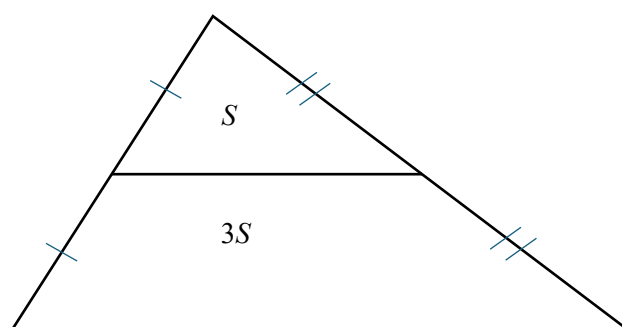
10.2. Kadangi  $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD, k = 2$ , o  $P_{ABCD} = 23$ , tai

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} = 2, \Rightarrow P_{A_1B_1C_1D_1} = 2 \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 23 = 46.$$

Atsakymas.  $P_{A_1B_1C_1D_1} = 46$ .

**Priminimai mokiniams.**

1. Trikampio vidurio linija nuo trikampio atkerta trikampį, kuris yra panašus į pradinį trikampį, šių trikampių panašumo koeficientas lygus 2, trikampių perimetrų santykis lygus 2 (lygus panašumo koeficientui), o plotų santykis lygus  $2^2 = 4$  (lygus panašumo koeficiento kvadratui).



2. Tiesė lygiagreti trikampio kraštinei (ir kertanti kitas dvi trikampio kraštines) nuo trikampio atkerta trikampį, panašų į duotąjį trikampį.

### **Komentarai mokytojams.**

1. Daugiakampiai, kurių vieno kraštinių ilgių santykiai su atitinkamų kito daugiakampio kraštinių ilgiais yra lygūs, o vieno daugiakampio kampų didumai yra lygūs kito daugiakampio kampų didumams, vadinami panašiais daugiakampiais.
2. Panašių daugiakampių atitinkamų atstumų santykis lygus panašumo koeficientui.
3. Panašių daugiakampių plotų (atitinkamų sričių plotų) santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.
4. Panašių erdvinių figūrų tūrių (atitinkamų sričių tūrių) santykis lygus panašumo koeficiento kubui.

11. Jonas yra aktyvus savo mokyklos krepšinio komandos „Griaustinis“ aštuolis. Komandoje yra 10 žaidėjų. Žiemos turnyro finalo rungtynėse „Griaustinis“ susitiko su kitos mokyklos komanda. Stebėdamas finalo rungtynes, Jonas užsirašė, kiek minučių žaidė kiekvienas komandos „Griaustinis“ narys ir kiek taškų jis pelnė. Surinktus duomenis Jonas surašė lentelėje ir pavaizdavo sklaidos diagrama.



|                         |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Žaistų minučių skaičius | 2 | 5 | 13 | 16 | 17 | 20 | 20 | 22 | 23 | 24 |
| Pelnytų taškų skaičius  | 1 | 3 | 5  | 4  | 11 | 6  | 8  | 7  | 5  | 7  |

Išnagrinėję lentelės ir diagramos duomenis, į lentelės tuščius langelius įrašykite trūkstamus skaičius.

(2 taškai)

### Sprendimas.

Iš diagramos nustatome, kad:

- 5 taškus pelnė du žaidėjai – vienas žaidė 13 minučių, o kitas žaidė 23 minutes, todėl į lentelės viršutinės eilutės tuščią langelį reikia įrašyti 13 (nes 23 yra įrašytas);
- 20 minučių žaidė du žaidėjai – vienas pelnė 6 taškus, o kitas pelnė 8 taškus, todėl į lentelės apatinės eilutės tuščią langelį reikia įrašyti 6 (nes 8 yra įrašytas).

### Patarimas mokiniams.

Uždavinius, susijusius su duomenų taškinėmis, linijinėmis, stulpelinėmis ir skritulinėmis diagramomis bei lentelėmis reikia mokėti spręsti (jie nesunkūs).

12. Duota nelygybė  $(x - 5)(x + 4) > 0$ . Ją galima išspręsti įvairiais būdais.

12.1. Sprendžiant šią nelygybę algebriniu būdu, sudaromos nelygybių sistemos. Kokie palyginimo ženklai turi būti vietoje simbolių ■ ir ♦, kad nelygybių sistemos būtų užrašytos teisingai? Pasirinkite tinkamus atsakymus.

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ x + 4 \blacksquare 0; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x - 5 \blacklozenge 0, \\ x + 4 < 0. \end{cases}$$

(1 taškas)

Atsakymas: ■ – , ♦ –

### Sprendimas.

12.1. Dviejų dauginamųjų  $x - 5$  ir  $x + 4$  sandauga  $(x - 5) \cdot (x + 4)$  yra teigiama  $(x - 5) \cdot (x + 4) > 0$ , kai abu dauginamieji yra teigiami arba abu dauginamieji yra neigiami:

$$(x - 5)(x + 4) > 0, \Rightarrow \begin{cases} x - 5 > 0, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x - 5 < 0, \\ x + 4 < 0. \end{cases}$$

### Nurodymai mokiniams.

1. Raskite šios nelygybės sprendinius – pabaikite spręsti.
2. Prisiminkite, kaip algeбриškai sprendžiamos pilnosios kvadratinės nelygybės  $ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$ .
3. Pakartokite nepilnųjų kvadratinių nelygybių ( $ax^2 + bx \lesseqgtr 0$ ,  $ax^2 + c \lesseqgtr 0$ ) algebrinį sprendimą.

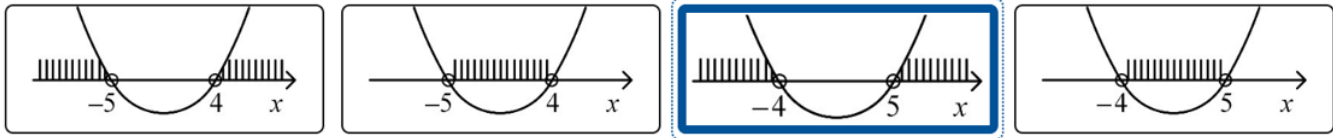
### Komentaras mokytojams.

Sprendimą galima surašyti naudojant visumos ženklą:

$$(x - 5)(x + 4) > 0, \Rightarrow \begin{cases} x - 5 > 0, \\ x + 4 > 0; \\ x - 5 < 0, \\ x + 4 < 0. \end{cases}$$

12.2. Nelygybė  $(x - 5)(x + 4) > 0$  yra kvadratinė ir ją galima išspręsti grafiniu būdu. Pažymėkite paveikslą, kuriame pavaizduoti visi šios nelygybės sprendiniai.

(1 taškas)



### Sprendimas.

12.2. Nelygybę  $(x - 5) \cdot (x + 4) > 0$  spręsdami grafiškai:

- 1) Braižome  $y = (x - 5) \cdot (x + 4)$  grafiko eskizą – parabolę ( $y = x^2 - x - 20$ ), nustatydami taškus, kuriuose ji kerta abscisių ašį:

$$\begin{array}{ll} x - 5 = 0, & x + 4 = 0, \\ x = 5; & x = -4. \end{array}$$

Vadinasi, parabolė abscisių ašį kerta taškuose, kuriuose  $x = -4$ ,  $x = 5$ .

- 2) Nustatome parabolės  $y = (x - 5) \cdot (x + 4) = x^2 - x - 20$  šakų kryptį – šakos nukreiptos į viršų, nes koeficientas prie  $x^2$  yra teigiamas ( $1 > 0$ ).
- 3) Nustatome  $x$  reikšmių intervalus, kuriuose parabolė yra aukščiau abscisių ašies:

$$x \in (-\infty; -4), (5; +\infty).$$

### Nurodymai mokiniams.

Prisiminkite, kaip grafiškai sprendžiamos kvadratinės nelygybės  $ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$ .

13. Gražina gavo 8000 eurų palikimą.

13.1. 3000 eurų ji padalijo paramos fondams „Keturkojų namai“, „Maži sparneliai“ ir „Žuvelių bičiuliai“ atitinkamai santykiu 3:2:1. Apskaičiuokite, kiek eurų atiteko paramos fondui „Maži sparneliai“. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:  eurų

## Sprendimas.

### 13.1.

1. Santykis „Keturkojų namai“ : „Maži sparneliai“ : „Žuvelių bičiuliai“ = 3 : 2 : 1 parodo, kad 3000 eurų suma buvo padalyta į  $3 + 2 + 1 = 6$  lygias dalis, kurių 3 dalys atiteko „Keturkojų namams“, 2 dalys – „Mažiams sparneliams“, o 1 dalis – „Žuvelių bičiuliams“.

2. Apskaičiuojame vienos dalies didumą:

$$3000 : 6 = 500 \text{ (eurų).}$$

3. Apskaičiuojame pinigų sumą tekusią „Mažiams sparneliams“:

$$500 \cdot 2 = 1000 \text{ (eurų).}$$

Atsakymas. 1000 eurų.

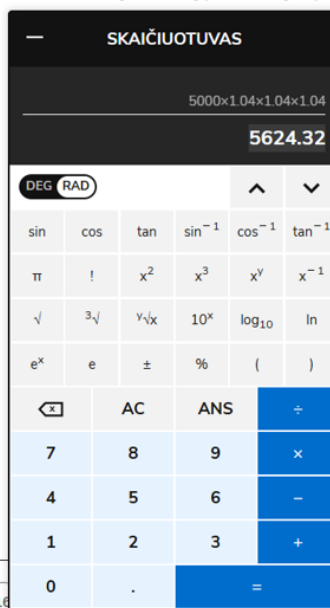
## Komentaras mokiniams ir mokytojams.

Santykį 3 : 2 : 1 reikia suprasti kaip  $(3x) : (2x) : (1x)$ . Tada:

$$3x + 2x + 1x = 3000, \quad 6x = 3000, \quad x = 500.$$

13.2. Likusius 5000 eurų Gražina 3 metams padėjo į banką „Sėkmė“, kuris moka 4 % sudėtinių metinių palūkanų. Apskaičiuokite, kokia pinigų suma bus Gražinos „Sėkmės“ banko sąskaitoje po 3 metų. *Irašykite atsakymą.*

Atsakymas:  Eur  ct



(1 taškas)

## Sprendimas.

### 13.2.

*I būdas.*

Po metų sąskaitoje bus  $5000 + 4\% (5000) = 5000 + 5000 \cdot 0,04 = 5000 + 200 = 5200$  eurų.

( $5000 \cdot 1,04 = 5200$ .)

Po dviejų metų sąskaitoje bus  $5200 + 4\% (5200) = 5200 + 5200 \cdot 0,04 = 5200 + 208 = 5408$  eurai.

( $5200 \cdot 1,04 = 5408$ .)

Po trijų metų sąskaitoje bus  $5408 + 4\% (5408) = 5408 + 5408 \cdot 0,04 = 5408 + 216,32 = 5624,32$  euro.

( $5408 \cdot 1,04 = 5624,32$ .)

*II būdas.*

$5000 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04 = 5000 \cdot 1,04^3 = 5000 \cdot 1,124864 = 5624,32$  (euro).

Atsakymas. 5624 eurai 32 centai.

## Komentarai mokiniams ir mokytojams.

1. Paprastosios palūkanos – kai palūkanos kiekvieną kartą skaičiuojamos nuo pradinės indėlio sumos.
2. Sudėtinės palūkanos – kai palūkanos kiekvieną kartą skaičiuojamos nuo pradinės indėlio ir prieš tai priskaičiuotų palūkanų sumos.
3. Uždavinį galima išspręsti naudojantis sudėtinių procentų formule (žr. formulių lapą):

### Sudėtiniai procentai

$$S_n = S_0 \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n;$$

čia  $S_0$  – dydžio  $S$  pradinė reikšmė,  $p$  – procentų skaičius,  $n$  – kartų skaičius.

14. Paveiksle pavaizduoto apskritimo centras yra taškas  $O$ . Tiesės  $TS$  ir  $TV$  liečia šį apskritimą atitinkamai taškuose  $S$  ir  $V$ . Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, atlikite užduotis.

14.1. Parodykite, kad  $x = 5$ .

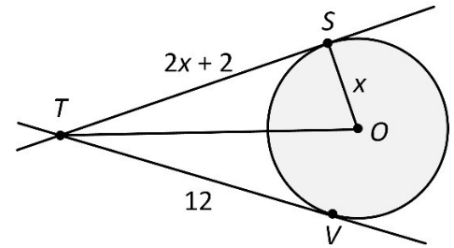
(1 taškas)

Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Sprendimas:

= + - × · ÷ ±

Liestinių atkarpos, išeinančios iš to paties taško, yra lygios.  
Vadinasi,  $TS = TV$ ,  $2x + 2 = 12$ ,  $2x = 10$ ,  $x = 5$ .



### Sprendimas.

Uždavinio sprendimas surašytas sprendimui skirtame laukelyje.

### Komentaras mokiniams ir mokytojams.

1. Per šalia apskritimo esantį tašką galima nubrėžti dvi apskritimo liestines. Tų liestinių atkarpų (iki lietimosi taškų) ilgiai yra vienodi.
2. Apskritimo spindulys, nubrėžtas į lietimosi tašką, yra statmenas tai liestinei.
3. Uždavinio sąlygos paveiksle pavaizduoti trikampiai  $TOS$  ir  $TOV$  yra lygūs ir statūs.
4. Aukščiau surašytus teiginius būtina žinoti.

14.2. Apskaičiuokite atkarpos  $OT$  ilgį, jeigu yra žinoma, kad  $x = 5$ . Pateikite sprendimą ir atsakymą.

(2 taškai)

Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Sprendimas:

|                |       |       |       |          |     |     |          |          |          |        |             |         |  |   |   |   |          |         |        |       |
|----------------|-------|-------|-------|----------|-----|-----|----------|----------|----------|--------|-------------|---------|--|---|---|---|----------|---------|--------|-------|
| $\sqrt{\quad}$ | $x/y$ | $x^a$ | $x_n$ | $\infty$ | ( ) | [ ] | $^\circ$ | $\angle$ | $\Delta$ | $\sim$ | $\parallel$ | $\perp$ |  | = | + | - | $\times$ | $\cdot$ | $\div$ | $\pm$ |
|----------------|-------|-------|-------|----------|-----|-----|----------|----------|----------|--------|-------------|---------|--|---|---|---|----------|---------|--------|-------|

1. Apskritimo spindulys, nubrėžtas į lietimosi tašką, yra statmenas liestinei, todėl  $\angle TSO = 90^\circ$ .  
 2. Iš stačiojo trikampio  $TSO$ , pagal Pitagoro teoremą  $TO^2 = TS^2 + SO^2$ ,  $TS = 2 \cdot 5 + 2 = 12$ ,  $OT = 5$   
 $TO^2 = 12^2 + 5^2$ ,  
 $TO^2 = 144 + 25$ ,  
 $TO^2 = 169$ ,  
 $TO = -13$  (netinka),  
 $TO = 13$ .

Atsakymas:

|                |       |       |       |          |     |     |          |          |          |        |             |         |  |   |   |   |          |         |        |       |
|----------------|-------|-------|-------|----------|-----|-----|----------|----------|----------|--------|-------------|---------|--|---|---|---|----------|---------|--------|-------|
| $\sqrt{\quad}$ | $x/y$ | $x^a$ | $x_n$ | $\infty$ | ( ) | [ ] | $^\circ$ | $\angle$ | $\Delta$ | $\sim$ | $\parallel$ | $\perp$ |  | = | + | - | $\times$ | $\cdot$ | $\div$ | $\pm$ |
|----------------|-------|-------|-------|----------|-----|-----|----------|----------|----------|--------|-------------|---------|--|---|---|---|----------|---------|--------|-------|

13

### Sprendimas.

Uždavinio sprendimas surašytas sprendimui skirtame laukelyje.

Atsakymas.  $TO = 13$ .

### Komentaras mokiniams.

Nepamirškite Pitagoro teoremos:

„Staciojo trikampio statinių ilgių kvadratų suma yra lygi įžambinės ilgio kvadratui“.

15. Suprastinkite reiškini  $\frac{2x}{2x-3} - \frac{2x+3}{4x-6}$ . Pateikite sprendimą ir atsakymą.

(3 taškai)

Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Sprendimas:

$$\sqrt{\quad} \quad x/y \quad x^n \quad x_a \quad \infty \quad ( \quad ) \quad [ \quad ] \quad ^\circ \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

$$\frac{2x}{2x-3} - \frac{2x+3}{4x-6} = \frac{2x}{2x-3} - \frac{2x+3}{(2x-3) \cdot 2} = \frac{2x \cdot 2}{(2x-3) \cdot 2} - \frac{2x+3}{(2x-3) \cdot 2} = \frac{2x \cdot 2 - (2x+3)}{(2x-3) \cdot 2} = \frac{4x-2x-3}{(2x-3) \cdot 2} = \frac{2x-3}{(2x-3) \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Atsakymas:

$$\sqrt{\quad} \quad x/y \quad x^n \quad x_a \quad \infty \quad ( \quad ) \quad [ \quad ] \quad ^\circ \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

$$\frac{1}{2}$$

### Sprendimas.

Uždavinio sprendimas surašytas sprendimui skirtame laukelyje.

Atsakymas.  $\frac{1}{2}$ .

### Komentari ir nurodymai mokiniams.

1. Šį uždavinį būtina mokėti spręsti.
2. Raskite duoto reiškinio apibrėžimo sritį.
3. Išspręskite daugiau panašių į šį uždavinį uždavinių.

### Komentari mokytojams.

1. Atlikdami sudėties ir atimties veiksmus su trupmenomis, pirmiausia jas subendravardikliname (naudodamiesi pagrindine trupmenos savybe).
2. Prastindami reiškini  $\frac{2x}{2x-3} - \frac{2x+3}{4x-6}$  gavome, kad jis tapaciai lygus  $\frac{1}{2}$ . Tai reiškia. Kad su visomis galimomis reiškinio kintamojo  $x$  reikšmėmis (reiškinio apibrėžimo sritį sudaro visi realieji skaičiai, išskyrus  $\frac{3}{2}$ ) reiškinio reikšmė yra ta pati ir yra lygi  $\frac{1}{2}$ .

16. Duota tiesinė funkcija  $f(x) = 3x + b$ . Šios funkcijos reikšmė lygi 2, kai argumento reikšmė lygi 6. Apskaičiuokite  $b$  reikšmę. *Irašykite atsakymą.*  
(1 taškas)

Atsakymas:

### Sprendimas.

Kai  $x = 6$ , tai  $3 \cdot 6 + b = 2$ . Iš čia  $18 + b = 2, b = -16$ .

Atsakymas.  $b = -16$ .

### Komentaras mokytojams.

Sąlygą reikia suprasti taip:

$$f(x) = 3x + b,$$

$$f(6) = 3 \cdot 6 + b,$$

$$f(6) = 2,$$

$$3 \cdot 6 + b = 2.$$

17. Pažymėkite dvi funkcijas, kurių grafiko eskizas galėtų būti paveiksle pavaizduota parabolė.

(2 taškai)

$y = (x-3)^2 - 1$

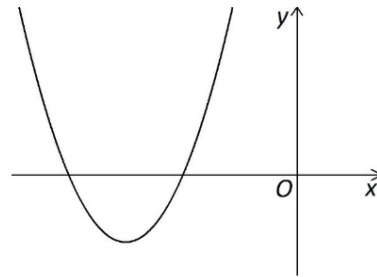
$y = (x-4)(x-8)$

$y = -(x+8)(x+4)$

$y = -(x-3)^2 - 1$

$y = (x+4)(x+8)$

$y = (x+3)^2 - 1$



### Sprendimas.

Parabolės lygtis, užrašyta standartiniu pavidalu, yra  $y = ax^2 + bx + c$ .

Iš pavaizduotos parabolės matome, kad jos šakos nukreiptos į viršų, todėl  $a > 0$ . Iš pateiktų 6 lygčių matome, kad parabolė  $y = -(x+8)(x+4)$ ,  $y = -(x-3)^2 - 1$  šakos nukreiptos į apačią, nes šias lygtis užrašę standartiniu pavidalu gautume  $a = -1 < 0$ ; lygtys  $y = -(x+8)(x+4)$ ,  $y = -(x-3)^2 - 1$  netinka.

Iš pavaizduotos parabolės matome, kad ji abscisių ašį kerta dviejuose taškuose, kurių abscisės ( $x$  reikšmės) yra neigiamos, todėl lygtis  $ax^2 + bx + c = 0$  turi du neigiamus sprendinius. Vadinasi,  $y = (x-4)(x-8)$  negali būti pavaizduotos parabolės lygtis, nes  $(x-4)(x-8) = 0$ , kai  $x = 4, x = 8$ .

Netinka ir  $y = (x-3)^2 - 1$ , nes tai yra lygtis parabolės, kuri gaunama parabolę  $y = x^2$  pastumiant per 3 vienetines atkarpas į dešinę ir per 1 vienetinę atkarpą žemyn, vadinasi, tos parabolės viršūnės koordinatės yra  $(3; -1)$ , o pavaizduotos parabolės viršūnės abi koordinatės yra neigiamos.

Lygtis  $y = (x+4)(x+8)$  gali būti pavaizduotos parabolės lygtis, nes ji kerta abscisių ašį taškuose, kuriuose  $x = -4, x = -8$ , o parabolės šakos nukreiptos į viršų, nes koeficientas prie  $x^2$  yra teigiamas (lygus 1).

Lygtis  $y = (x+3)^2 - 1$  gali būti pavaizduotos parabolės lygtis, nes lygtį atitinkančios parabolės viršūnės koordinatės yra  $(-3; -1)$ , o parabolės šakos nukreiptos į viršų, nes koeficientas prie  $x^2$  yra teigiamas (lygus 1).

Atsakymas.  $y = (x+4)(x+8)$ ,  $y = (x+3)^2 - 1$ .

### Priminimas mokiniams.

Parabolė  $y = a(x-m)^2 + n$  gaunama pastumiant parabolę  $y = ax^2$  per:

- $m$  vienetinių atkarpų į dešinę, kai  $m > 0$ ; per  $m$  vienetinių atkarpų į kairę, kai  $m < 0$ ;
- $n$  vienetinių atkarpų į viršų, kai  $n > 0$ ; per  $n$  vienetinių atkarpų į apačią, kai  $n < 0$ .

18. Nustatykite, su kuria teigiama  $a$  reikšme lygtis  $\frac{(x+2)(x-a)}{x-5} = 0$  turi tik vieną sprendinį. *Jrašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:  $a =$

### Sprendimas.

Trupmena  $\frac{(x+2)(x-a)}{x-5}$  yra lygi 0, kai jos skaitiklis  $(x+2)(x-a) = 0$ , t. y. kai:

$$x = -2 \text{ ir } x = a,$$

o vardiklis  $x - 5$  nelygus 0, t. y.:

$$x \neq 5.$$

Vadinasi, duota lygtis turi du sprendinius  $x = -2$  ir  $x = a$ , kai  $a \neq 5$ .

Pastebėkime, kad kai  $a = 5$ , tai turime lygtį

$$\frac{(x+2)(x-5)}{x-5} = 0,$$

kuri turi vienintelį sprendinį  $x = -2$ , nes  $x = 5$  lygčiai netinka – esant šiai  $x$  reikšmei lygtis yra neapibrėžta (neturi prasmės), nes jos vardiklis lygus 0.

Vadinasi, lygtis  $\frac{(x+2)(x-a)}{x-5} = 0$  turi vienintelį sprendinį, kai  $a = 5$ .

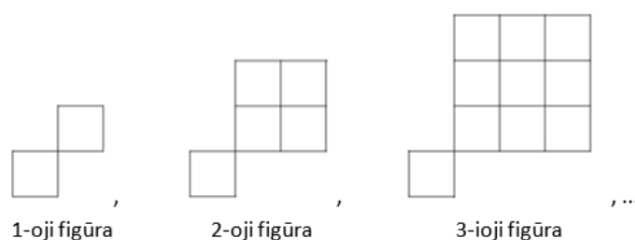
Atsakymas.  $a = 5$ .

### Komentaras mokytojams.

Kai  $a = -2$ , tai lygtis turi du lygius (kartotinius) sprendinius.

19. Paveiksle pavaizduotos figūros, sudarytos iš vienodo dydžio kvadratėlių. Šios figūros yra pirmieji trys sekos nariai. Parašykite formulę, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti sekos  $n$ -tojoje figūroje esančių kvadratėlių skaičių  $c_n$ .

(1 taškas)



Atsakymas:

|                |       |       |       |   |   |   |          |         |        |       |
|----------------|-------|-------|-------|---|---|---|----------|---------|--------|-------|
| $\sqrt{\quad}$ | $x/y$ | $x^n$ | $x_n$ | = | + | - | $\times$ | $\cdot$ | $\div$ | $\pm$ |
|----------------|-------|-------|-------|---|---|---|----------|---------|--------|-------|

$$c_n = 1 + n^2$$

### Sprendimas.

Pastebėkime, kad pavaizduotos figūros gaunamos paeiliui prie kvadratėlio prijungiant kvadratą sudarytą iš 1 kvadratėlio (1-oji figūra),  $2 \times 2 = 2^2$  kvadratėlius (2-oji figūra),  $3 \times 3 = 3^2$  kvadratėlius (3-oji figūra), ...,  $n \times n = n^2$  kvadratėlių ( $n$ -oji figūra).

Vadinasi,  $n$ -oji figūra sudaryta iš  $1 + n^2$  kvadratėlių.

Atsakymas.  $c_n = 1 + n^2$ .

20. Inde buvo 4 litrai 8 % druskos tirpalo, gauto druską ištirpinus gėlame vandenyje. Mokinys iš indo išpylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 2 litrus gėlo vandens. Kiek procentų druskos dabar yra tirpale? *Įrašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:  %

### Sprendimas.

1. Kad skaičiavimai būtų paprastesni litrus paverskime mililitrais: 4 litrai = 4000 mililitrų.
2. Apskaičiuojame druskos tirpalo sudėtį:

$$8 \% (4000) = 4000 \cdot 0,08 = 320,$$

vadinasi, tirpale yra 320 mililitrų druskos ir  $4000 - 320 = 3680$  mililitrų vandens.

3. Išpylus 1 litrą, t. y. 1000 mililitrų tirpalo turime 3000 mililitrų tirpalą. Apskaičiuojame tirpalo sudėtį:

$$8 \% (3000) = 3000 \cdot 0,08 = 240,$$

vadinasi, tirpale yra 240 mililitrų druskos ir  $3000 - 240 = 2760$  mililitrų vandens.

4. Pripylus 2 litrus, t. y. 2000 mililitrų vandens turime 5000 mililitrų tirpalą, kuriame yra  $2760 + 2000 = 4760$  mililitrų vandens ir 240 mililitrų druskos.

5. Apskaičiuojame druskos koncentraciją gautajame tirpale:

$$\frac{240}{5000} \cdot 100 \% = 4,8 \%$$

Atsakymas. 4,8 %.

### Komentarai mokiniams ir mokytojams.

1. Sprendimo pradžią patogiu surašyti lentele:

| Tirpalas (litrais) | Koncentracija (%) | Vanduo (litrais) | Druska (litrais) | Skaičiavimai          |
|--------------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------------|
| 4                  | 8 %               | 3,68             | 0,32             | $4 \cdot 0,08 = 0,32$ |
| 3                  | 8 %               | 2,76             | 0,24             | $3 \cdot 0,08 = 0,24$ |
| 5                  | ? %               | 4,76             | 0,24             |                       |

$$? = \frac{0,24}{5} \cdot 100 \% = 4,8 \%$$

*Pastaba.* Pirmoji eilutė nebūtina, skaičiavimus galima pradėti nuo 3 litrų tirpalo – nupylus dalį tirpalo, tirpalo koncentracija nesikeičia.

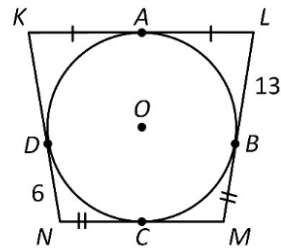
2. Tam tikros **medžiagos koncentracija** tirpale (mišinyje, lydinyje) dažniausiai nurodoma procentų skaičiumi:

$$\frac{\text{Medžiagos kiekis}}{\text{Tirpalo (mišinio, lydinio) kiekis}} \cdot 100 \%$$

3. Išspręskite daugiau uždavinių, susijusių su mišinių, lydinių koncentracijomis.

21. Apie apskritimą, kurio centras yra taškas  $O$ , apibrėžtas keturkampis  $KLMN$ , kuris liečia apskritimą taškuose  $A, B, C$  ir  $D$ . Yra žinoma, kad  $LB = 13$ ,  $ND = 6$ . Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, apskaičiuokite keturkampio  $KLMN$  perimetrą. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas: **Sprendimas.**

- $LB = LA = AK = KD = 13$ , nes iš to paties taško einančių liestinių atkarpos yra lygios.
- $DN = NC = MB = MC = 6$ , nes iš to paties taško einančių liestinių atkarpos yra lygios.
- $P_{KLMN} = 4 \cdot LB + 4 \cdot DN = 4 \cdot 13 + 4 \cdot 6 = 4 \cdot (13 + 6) = 4 \cdot 19 = 76$ .

Atsakymas. 76.

**Komentarai mokiniams.**

Prisiminkite teiginius, susijusius su apskritimu įbrėžtu į kampą, į trikampį, į keturkampį.

- Į kampą įbrėžto apskritimo:

- centras yra kampo pusiaukampinėje;
- centras yra vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių;
- spinduliai, nubrėžti į lietimosi taškus, yra statmeni atitinkamoms kampo kraštinėms.

Į kiekvieną kampą galima įbrėžti be galo daug apskritimų.

- Į trikampį įbrėžto apskritimo:

- centras yra trikampio kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas;
- centras yra vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių;
- spinduliai, nubrėžti į lietimosi taškus, yra statmeni atitinkamoms trikampio kraštinėms.

Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą.

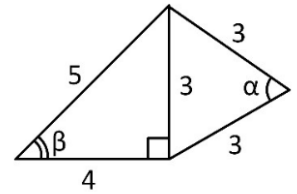
- Į keturkampį įbrėžto apskritimo:

- centras yra keturkampio kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas;
- centras yra vienodai nutolęs nuo keturkampio kraštinių;
- spinduliai, nubrėžti į lietimosi taškus, yra statmeni atitinkamoms keturkampio kraštinėms.

Ne į kiekvieną keturkampį galima įbrėžti apskritimą. Įbrėžtinį apskritimą turi tik tie keturkampiai, kurių priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios.

22. Naudodamiesi brėžinyje pateiktais duomenimis, apskaičiuokite  $\cos\alpha + \sin\beta$ . Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)



Atsakymas:

### Sprendimas.

1.  $\alpha = 60^\circ$ , nes lygiakraščio trikampio kiekvieno kampo didumas lygus  $60^\circ$ ,  $\cos(\alpha) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ .

2.  $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$ .

3.  $\cos(\alpha) + \sin(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{11}{10}$ .

Atsakymas. 1,1.

### Komentarai mokiniams.

1. Lygiakraščio trikampio visi kampų didumai yra lygūs (jų didumai lygūs  $60^\circ$ ).
2. Lygiašonio trikampio kampų, esančių prie trikampio pagrindo, didumai yra lygūs.
3. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų didumų suma lygi  $90^\circ$ .
4. Bet kokio trikampio kampų didumų suma lygi  $180^\circ$ .
5. Būtina žinoti teiginius, susijusius su stačiuoju trikampiu. Šiame uždavinyje reikėjo pasinaudoti tuo, kad:

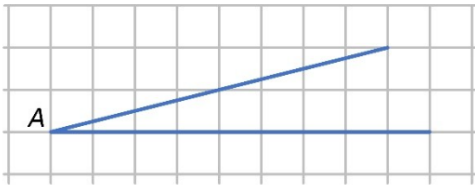
„Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas lygus statinio, esančio prieš tą kampą, ir įžambinės ilgių santykiui.“

### Komentarai mokytojams.

1. Teiginį, kad trikampio kampų didumų suma lygi ištiestinio kampo didumui ( $180^\circ$ ), mokiniai turėtų gebėti įrodyti.
2. Mokiniai turi gebėti įrodyti, kad keturkampio kampų didumų suma yra lygi  $360^\circ$ .

23. Ant languoto popieriaus lapo (visi langeliai yra lygūs kvadratai) Kristupas nubraižė kampą  $A$  (žr. pav.). Apskaičiuokite kampo  $A$  tangentą. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)



Atsakymas:  $\text{tg} \angle A =$

### Sprendimas.

1. Sukonstruojame statųjį trikampį, pavyzdžiui taip:

- įstrižai einančioje kampo kraštinėje pasirenkame tašką, sutampantį su langelio viršūne (patogūs yra du taškai);
- iš pasirinkto taško brėžiame statmenį į horizontalią kampo kraštinę (statmuo eina langelių kraštinėmis).

2. Suskaičiuojame gautojo stačiojo trikampio statinių ilgius (langeliais) (galimi variantai: 2 ir 8, arba 1 ir 4).

3. Apskaičiuojame statinio, esančio prieš kampą  $A$ , ilgio ir kito statinio (esančio prie kampo  $A$ ) ilgio santykį – jis lygus kampo  $A$  tangentui:

$$\text{tg}(\angle A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Atsakymas.  $\text{tg}(\angle A) = 0,25$ .

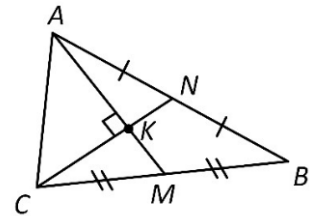
### Patarimai mokiniams.

Apskaičiuokite pavaizduoto kampo sinusą ir tangentą bei įsitikinkite, kad:

$$\text{tg}(\angle A) = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}, \quad \sin^2(\angle A) + \cos^2(\angle A) = 1.$$

24. Naudodamiesi brėžinyje pateiktais duomenimis, apskaičiuokite trikampio  $ACK$  plotą, jei  $AM = 12$ , o  $CN = 9$ . Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)



Atsakymas:

### Sprendimas.

Reikia apskaičiuoti stačiojo trikampio  $ACK$  plotą. Jis lygus statinių ilgių sandaugos pusei:

$$S_{ACK} = \frac{AK \cdot CK}{2}.$$

1. Iš brėžinio matome, kad atkarpos  $CN$  ir  $AM$  yra trikampio  $ABC$  pusiauakraštinės, o taškas  $K$  – pusiauakraštinių susikirtimo taškas.

2. Trikampio pusiauakraštinių susikirtimo taškas kiekvieną pusiauakraštinę padalija į atkarpas, kurių ilgesnioji (einanti nuo trikampio viršūnės) yra dvigubai ilgesnė už trumpesniosios atkarpos ilgį, todėl:

$$CK = \frac{2}{3} \cdot CN = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6;$$

$$AK = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

3.

$$S_{ACK} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

Atsakymas.  $S_{ACK} = 24$ .

### Patarimai mokiniams.

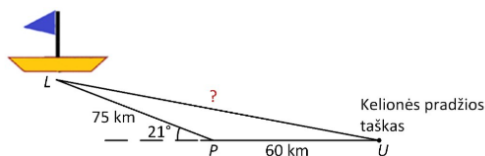
1. Reikia žinoti su trikampio pusiauakraštinėmis susijusiu teiginiu:

- Trikampio pusiauakraštinė padalija trikampį į du lygiapločius trikampius.
- Visos trys trikampio pusiauakraštinės susikerta viename taške.
- Trikampio pusiauakraštinių susikirtimo taškas kiekvieną pusiauakraštinę padalija į dvi atkarpas, kurių viena (einanti nuo trikampio viršūnės) yra dvigubai ilgesnė už kitą.

2. Reikia žinoti, kad stačiojo trikampio plotą galima apskaičiuoti randant statinių ilgių sandaugos pusę.

25. Laivelis, išplaukęs iš uosto  $U$ , nuplaukė 60 km vakarų kryptimi į prielauką  $P$  (žr. pav.). Pakeitęs kursą (pasukęs  $21^\circ$  į šiaurę), laivelis nuplaukė dar 75 km. Apskaičiuokite, kokių atstumu kilometrais nuo uosto yra nutolęs laivelis. *Pateikite sprendimą ir atsakymą, suapvalintą iki sveikojo skaičiaus.*

(3 taškai)



Jei, užrašydami sprendimą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Sprendimas:

$$\sqrt{\quad} \quad x^y \quad x^{\frac{\square}{\square}} \quad x_{\square} \quad \infty \quad ( ) \quad [ ] \quad ^{\circ} \quad \angle \quad \Delta \quad \sim \quad \parallel \quad \perp \quad | \quad \approx \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

$$\begin{aligned} 1. \angle LPU &= 180^\circ - 21^\circ = 159^\circ. \\ 2. LU^2 &= UP^2 + PL^2 - 2 \cdot UP \cdot PL \cdot \cos \angle LPU, \\ LU^2 &= 60^2 + 75^2 - 2 \cdot 60 \cdot 75 \cdot \cos 159^\circ, \\ LU^2 &= 3600 + 5625 - 9000 \cdot (-0,9335804\dots), \\ LU^2 &\approx 17607,2238, \\ LU &\approx -\sqrt{17607,2238} \text{ (netinka)}, \\ LU &\approx \sqrt{17607,2238} = 132,69\dots, \\ LU &\approx 133. \end{aligned}$$

Atsakymas:

$$\sqrt{\quad} \quad x^y \quad x^{\frac{\square}{\square}} \quad x_{\square} \quad \infty \quad ( ) \quad [ ] \quad ^{\circ} \quad \angle \quad \Delta \quad \sim \quad \parallel \quad \perp \quad | \quad \approx \quad = \quad + \quad - \quad \times \quad \cdot \quad \div \quad \pm$$

133 km.

**Sprendimas.**

Sprendimas pateiktas sprendimo laukelyje.

Atsakymas. 133 km.

**Komentarai mokiniams ir mokytojams.**

1. Sprendžiant lygtį  $x^2 = a$  ( $a > 0$ ), rekomenduotina užrašyti abu lygties sprendinius:

$$x^2 = a \quad (a > 0),$$

$$x = -\sqrt{a},$$

$$x = \sqrt{a},$$

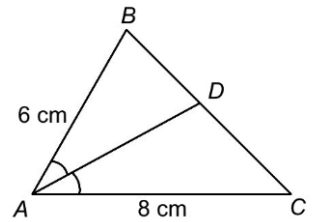
nepriklausomai nuo nežinomojo  $x$  prasmės.

2. Jei nežinomasis, pagal uždavinio sąlygą, kurios nors gautosios reikšmės įgyti negali, tai šalia tos reikšmės rekomenduotina parašyti, kad gautoji reikšmė *netinka*.

3. Sinusų ir kosinusų teoremą būtina mokėti taikyti.

26. Trikampio  $ABC$  kraštinės  $AB$  ilgis 6 cm, o kraštinės  $AC$  ilgis 8 cm.  $AD$  yra trikampio  $ABC$  pusiaukampinė. Apskaičiuokite trikampių  $ABC$  ir  $ADC$  plotų santykį. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)



- $\frac{3}{4}$ 
  $\frac{7}{3}$ 
  $\frac{7}{4}$ 
  $\frac{4}{3}$

### Sprendimas.

1. Naudodamiesi trigonometrine trikampio ploto formule randame trikampių  $ABD$  ir  $ACD$  plotus:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) = 3 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right),$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) = 4 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right).$$

2. Naudodamiesi trikampių  $ABD$  ir  $ACD$  plotais randame trikampio  $ABC$  plotą:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = 3 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) + 4 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right) = 7 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right).$$

3. Apskaičiuojame trikampių  $ABC$  ir  $ADC$  plotų santykį:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{7 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right)}{4 \cdot AD \cdot \sin\left(\angle \frac{A}{2}\right)} = \frac{7}{4}.$$

Atsakymas.  $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{7}{4}$ .

### Komentaras mokytojams.

Praversti gali trikampio pusiaukampinės savybės:

- Trikampio visos trys pusiaukampinės susikerta viename taške;
- Trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas yra įbrėžtinio į trikampį apskritimo centras;
- Trikampio pusiaukampinė padalija trikampio kraštinę į dvi atkarpas, proporcingas greta jų esančioms trikampio kraštinėms.

27. Vakarė 9 dienas dalyvavo profesiniuose mokymuose. Diagramoje pavaizduota, kiek laiko (valandomis) kiekvieną dieną buvo skirta teorijai mokytis ir kiek praktinei veiklai. Diagramoje nubrėžta tiesė, apie kurią išsidėstę sklaidos diagramos taškai. Kuri iš pateiktų lygčių yra šios tiesės lygtis? Pažymėkite teisingą atsakymą.

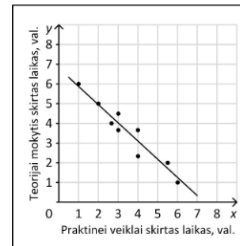
(1 taškas)

$y = -0,94x + 6,8$

$y = -0,94x - 6,8$

$y = 0,94x + 6,8$

$y = 0,94x - 6,8$



### Sprendimas.

Tiesinės funkcijos formulė yra  $y = kx + b$ .

Iš paveikslėlio matome, kad  $k < 0$ ,  $b > 0$ , – šias sąlygas tenkina tik lygtis  $y = -0,94x + 6,8$ .

Atsakymas.  $y = -0,94x + 6,8$ .

### Komentarai mokiniams ir mokytojams.

1. Reikia žinoti tiesės  $y = kx + b$  koeficientų  $k$  ir  $b$  prasmes.

Skaičius  $k$  nurodo tiesės kryptį:

- kai  $k > 0$ , tai tiesė kyla į viršų (žiūrint iš kairės į dešinę),
- kai  $k < 0$ , tai tiesė leidžiasi į apačią (žiūrint iš kairės į dešinę),
- kai  $k = 0$ , tai tiesė yra lygiagreti abscisių ( $Ox$ ) ašiai; tos tiesės lygtis yra  $y = b$ .

Skaičius  $b$  nurodo, kuriame taške tiesė kerta ordinačių ( $Oy$ ) ašį – šio taško koordinatės yra  $(0; b)$ .

Kai  $k = 0$  ir  $b = 0$ , tai tiesės lygtis yra  $y = 0$  – ši tiesė sutampa su abscisių ( $Ox$ ) ašimi.

Tiesė  $y = kx + b$  abscisių ( $Ox$ ) ašį kerta taške  $(-\frac{b}{k}; 0)$ .

2. Paveikslėlyje pavaizduoti dydžiai yra neigiamai koreliuoti.

28. Lygties  $15x^2 + bx + 7 = 0$  diskriminantas lygus 0.

Kuris teiginys apie nelygybę  $15x^2 + bx + 7 > 0$  yra teisingas? Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

Nelygybė sprendinių neturi.

Tik vienas realusis skaičius yra nelygybės sprendinys.

Visi realieji skaičiai, išskyrus vieną skaičių, yra nelygybės sprendiniai.

Visi realieji skaičiai yra nelygybės sprendiniai.

### Sprendimas.

Parabolės  $y = 15x^2 + bx + 7$ :

- šakos nukreiptos į viršų, nes  $15 > 0$ ,
- viršūnė yra abscisių ašyje, nes  $D = 0$ .

Vadinasi, parabolė  $y = 15x^2 + bx + 7$  yra išsidėsčiusi virš abscisių ašies, išskyrus parabolės viršūnės tašką – jis priklauso abscisių ašiai.

O tai reiškia, kad nelygybės  $15x^2 + bx + 7 > 0$  sprendiniai yra visi skaičiai, išskyrus vieną skaičių – jis lygus parabolės viršūnės abscisei.

*Atsakymas.* Visi realieji skaičiai, išskyrus vieną skaičių, yra nelygybės  $15x^2 + bx + 7 > 0$  ( $D = 0$ ) sprendiniai.

### Komentarai mokytojams.

1. Kvadratinės nelygybės mokiniai turi mokėti spręsti ir algebriskai, ir grafiškai.
2. Parabolės  $y = ax^2 + bx + c$  koeficientų  $a$  ir  $b$  prasmę turėtų žinoti (būtų gerai, kad suprastų) visi mokiniai.
3. Trinario  $ax^2 + bx + c$  diskriminanto ženklą prasmingumo slenkstinio lygio mokiniai gali ir nežinoti.

29. Trikampio  $ABC$  kraštinių ilgiai yra 6, 8 ir 10. Į šį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio centras yra taškas  $O$ . Apskaičiuokite įbrėžto apskritimo spindulio ilgį. *Įrašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:

### Sprendimas.

1. Duotas trikampis yra status, nes jo kraštinių ilgiai tenkina atvirkštinę Pitagoro teoremą:

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

2. Šio stačiojo trikampio plotas lygus statinių ilgių sandaugos pusei:

$$S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

3. Trikampio plotas lygus įbrėžtinio į trikampį apskritimo spindulio ilgio ir trikampio pusperimetrio sandaugai:

$$S = p \cdot r = \frac{6 + 8 + 10}{2} \cdot r = 12 \cdot r.$$

4. Vadinasi,

$$12 \cdot r = 24, \quad r = 2.$$

Atsakymas. 2.

### Komentarai mokiniams.

1. Pravartu žinoti, kad trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra  $3a, 4a, 5a$ , čia  $a$  – bet kuris teigiamas skaičius, yra statūs. Pavyzdžiui, statūs yra trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra:

3, 4, 5;

6, 8, 10;

9, 12, 15;

4,5, 6, 7,5;

$3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$ .

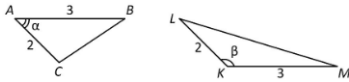
2. Formulę, kad trikampio plotas lygus įbrėžtinio į trikampį apskritimo spindulio ilgio ir trikampio pusperimetrio sandaugai:

$$S = p \cdot r$$

vertėtų gebėti įrodyti.

30. Paveiksle pavaizduoti trikampiai  $ABC$  ir  $KLM$  yra lygiapločiai ( $\alpha < \beta$ ). Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, apskaičiuokite  $\alpha + \beta$ .  
Įrašykite atsakymą.

(2 taškai)



Atsakymas:  $\alpha + \beta =$    $^\circ$

### Sprendimas.

1. Naudodamiesi trigonometrine trikampio ploto formule randame trikampių plotus:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(\alpha) = 3 \sin(\alpha),$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(\beta) = 3 \sin(\beta).$$

2. Šių trikampių plotai yra lygūs, todėl:

$$3 \sin(\alpha) = 3 \sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta).$$

3. Lygybė  $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$  yra teisinga tik kai  $\beta = 180^\circ - \alpha$ . Vadinasi,

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Atsakymas.  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

### Komentaras mokiniams.

- Šis uždavinys atitinka aukštesnįjį lygį.
- Brėžiniai daromi prisilaikant sąlygoje nurodytų duomenų (brėžiniai yra kiek įmanoma tikslūs).

31. Įrodykite, kad parabolės  $y = -3x^2 + 6kx$ , kai  $k > 0$ , viršūnės abscisės kvadrato ir viršūnės ordinatės santykis lygus  $\frac{1}{3}$ .

(3 taškai)

Jei, užrašydami įrodymą, norite rašyti kitoje eilutėje, paspauskite klavišą „Enter“.

Įrodymas:

|                |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|-------|-------|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{\quad}$ | $x/y$ | $x^a$ | $x_a$ | = | + | - | × | · | ÷ | ± |
|----------------|-------|-------|-------|---|---|---|---|---|---|---|

$$\text{Parabolės viršūnės abscisė } x_V = -\frac{6k}{2 \cdot (-3)} = k.$$

$$\text{Parabolės viršūnės ordinatė } y_V = -3k^2 + 6k \cdot k = -3k^2 + 6k^2 = 3k^2.$$

$$\frac{k^2}{3k^2} = \frac{1}{3}.$$

### Sprendimas.

Sprendimas surašytas sprendimo laukelyje.

### Komentaras mokytojams ir mokiniams.

Parabolės  $y = ax^2 + bx + c$  viršūnės:

- abscisė  $x_{\text{viršūnės}} = -\frac{b}{2a}$  – ši formulė pateikta formulių rinkinyje;
- ordinatė  $y_{\text{viršūnės}} = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  – žinant parabolės viršūnės abscisę, viršūnės ordinatę apskaičiuojame į parabolės lygtį įrašydami viršūnės abscisės reikšmę.