

III gimnazijos klasė, B kursas

1 sritis „Skaičiai ir skaičiavimai“

1.1 tema „Skaičių aibės“

^ Skaičių aibės.

Nagrinėjama realiųjų skaičių aibės struktūra.

Apibrėžiama aibių sąjunga, sankirta ir skirtumas. Atliekami veiksmai su aibėmis.

Praktikuojamasi veiksmus su aibėmis vaizduoti Veno diagramomis.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Aibė, skaičių aibė
- Skaičių intervalas
- Tuščioji aibė
- Aibės elementas
- Natūraliųjų skaičių aibė
- Sveikųjų skaičių aibė
- Racionaliųjų skaičių aibė
- Iracionaliųjų skaičių aibė
- Realiųjų skaičių aibė
- Baigtinė, begalinė aibė
- Veiksmai su aibėmis:
 - Aibių sąjunga
 - Aibių sankirta
 - Aibių skirtumas
- Veno diagramos

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Natūraliųjų skaičių aibės žymuo: $\mathbb{N}$, arba $\{1; 2; 3; \dots\}$
- Sveikųjų skaičių aibės žymuo: $\mathbb{Z}$, arba $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- Racionaliųjų skaičių aibės žymuo: $\mathbb{Q}$, arba $\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$
- Iracionaliųjų skaičių aibės žymuo: $\mathbb{I}$
- Realiųjų skaičių aibės žymuo: $\mathbb{R}$, arba $]-\infty; +\infty[$, arba $(-\infty; +\infty)$
- Tuščiosios aibės simbolis: $\emptyset$
- Skaičių aibės poaibio ženklas: $\subset$
- Elemento priklausomumo aibei ženklas: $\in$
- Elemento nepriklausomumo aibei ženklas: $\notin$
- Aibių veiksmų ženklai:
 - Aibių sąjungos ženklas: $\cup$
 - Aibių sankirtos ženklas: $\cap$
 - Aibių skirtumo ženklas: $\setminus$

- Intervalų skliaustų žymenys:
 - Atvirojo intervalo skliaustai:
 $] \dots ; \dots [$, čia $] –$ kairysis skliaustas, $[–$ dešinysis skliaustas
 arba
 $(\dots ; \dots)$, čia $(–$ kairysis skliaustas, $) –$ dešinysis skliaustas
 - Pusiau atvirojo intervalo skliaustai:
 $] \dots ; \dots]$, čia $] –$ kairysis skliaustas, $] –$ dešinysis skliaustas
 arba
 $(\dots ; \dots]$, čia $(–$ kairysis skliaustas, $] –$ dešinysis skliaustas
 - Pusiau uždarojo intervalo skliaustai:
 $[\dots ; \dots [$, čia $[–$ kairysis skliaustas, $[–$ dešinysis skliaustas
 arba
 $[\dots ; \dots)$, čia $[–$ kairysis skliaustas, $) –$ dešinysis skliaustas
 - Uždarojo intervalo skliaustai:
 $[\dots ; \dots]$, čia $[–$ kairysis skliaustas, $] –$ dešinysis skliaustas

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Realiųjų skaičių aibės struktūra:
 - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
 - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
- Natūraliųjų lyginių skaičių aibė: $L = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Natūraliųjų nelyginių skaičių aibė: $N = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

- Programoje verta paminėti aibės poaibį

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Formalizuojamos ir apibendrinamos anksčiau įgytos žinios apie realiųjų skaičių aibės struktūrą, mokoma(si) rasti ir užrašyti skaičių aibių ir intervalų sąjungą, sankirtą bei skirtumą. Aiškinant aibių sąjungą, sankirtą ir skirtumą bei aibės poaibio sąvoką naudojamosi Veno diagramomis.
2. Pravartu pabrėžti, kad sprendami lygčių (nelygybių) sistemą, ieškome į sistemą įeinančių lygčių (nelygybių) sprendinių aibių sankirtos.
3. Natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, iracionaliųjų ir realiųjų skaičių aibių tarpusavio ryšius gebėti apibūdinti naudojantis aibių teorijos simboliais ir žymenimis ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subset$, $\in$, $\notin$).

Uždaviniai.

1. Rekomenduotina spręsti uždavinius, kuriuos patogiau spręsti naudojantis Veno diagramomis.
2. Pravartu prisiminti procento sąvoką ir išspręsti keletą su jų taikymu realiame gyvenime susijusių uždavinių.
3. Pravartu prisiminti su santykiais (su proporcijomis) susijusius uždavinius. Svarbu, kad mokiniai teisingai suprastų dydžių santykių prasmę, pavyzdžiui, jei $a : b = 2 : 3$, tai $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} = \frac{2x}{3x}$, $a = \frac{2}{3}b$, $b = \frac{3}{2}a$.

1.2 tema „Realiojo skaičiaus modulis“

Realiojo skaičiaus modulis.

Skaiciaus modulis. Apibrėžiama realiojo skaičiaus modulio sąvoka, paaiškinama jo geometrinė prasmė.

Pavyzdžiais pagrindžiamos modulio savybės:

$$|-a| = |a|, \quad |a|^2 = a^2, \quad |a - b| = |b - a|.$$

Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su moduliais reikšmes, traukti kvadratinę šaknį iš antrojo laipsnio:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Realiojo skaičiaus modulis
- Realiojo skaičiaus modulio geometrinė prasmė
- Modulio savybės

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Modulio žymuo: $| \dots |$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Skaiciaus modulio apibrėžtis: $|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a > 0 \\ 0, & \text{kai } a = 0 \\ -a, & \text{kai } a < 0 \end{cases}$
- Modulio savybės:
 - Vienas kitam priešingų skaičių modulių savybė: $|-a| = |a|$
 - Skirtumo modulio savybė: $|a - b| = |b - a|$
 - Modulio kvadrato savybė: $|a|^2 = a^2$
- Kvadratinės šaknies savybė, kai pošaknis yra kvadratas: $\sqrt{a^2} = |a|$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

Rekomendacijos.

Teorija.

- Įvedama realiojo skaičiaus modulio sąvoka ir žymėjimas: $|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a > 0; \\ 0, & \text{kai } a = 0; \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$

Pastaba. Čia nevartotinas riestinis skliaustas „{“, nes jis reiškia „sankirtą“, o tinkamas ženklas „[“ atitinka „sąjungą“.

- Pateikiamos ir pavyzdžiais paaiškinamos programoje nurodytos formulės $|-a| = |a|$, $|a|^2 = a^2$, $|a - b| = |b - a|$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Uždaviniai.

- Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su moduliais reikšmes.
- Sprendžiami uždaviniai susiję su formulės taikymu $\sqrt{a^2} = |a|$. Pravartu parodyti mokiniams, kaip naudojantis šia lygybe galima spręsti nepilnąją kvadratinę lygtį $x^2 = a$, $a \geq 0$.

1.3 tema „Laipsniai“

^ Laipsniai.

Aiškinama(si) laipsnio su racionaliuoju rodikliu $a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) samprata, įsitikinama laipsnį su racionaliuoju rodikliu ir šaknį siejančios lygybės

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

teisingumu (keliant abi lygybės puses n -tuoju laipsniu). Mokoma(si) ja naudotis, pertvarkant skaitinius reiškinius su šaknimis ir laipsniais.

Pagrindžiama, kodėl laipsniams su racionaliaisiais rodikliais (ir veiksams su tokiais laipsniais) būdingos laipsnių su natūraliaisiais rodikliais (ir veiksmų su tokiais laipsniais) savybės:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n : a^m = a^{n-m}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \quad (a : b)^m = a^m : b^m.$$

Mokoma(si) skaičiuotuvu rasti laipsnio su racionaliuoju rodikliu dešimtainę apytikslių reikšmę, taikyti laipsnių ir veiksmų su laipsniais savybes skaitiniams reiškiniams pertvarkyti.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Racionalusis trupmeninis skaičius
- Laipsnis, laipsnio pagrindas, laipsnio rodiklis
- Laipsnis su racionaliuoju trupmeniniu rodikliu (laipsnis, kurio rodiklis racionalusis trupmeninis)
- Laipsnio su racionaliuoju trupmeniniu rodikliu apytikslių reikšmė
- Laipsnis su racionaliuoju rodikliu (laipsnis, kurio rodiklis racionalusis)
- Laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybės
- Veiksmų su laipsniais, kurių rodikliai racionalieji, savybės
- Laipsnio su racionaliuoju rodikliu apytikslių reikšmė
- Skaitinių reiškinių su laipsniais, kurių rodikliai racionalieji, pertvarkymas ir reikšmių skaičiavimas

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Racionalusis trupmeninis skaičius:
 $\frac{m}{n}$, čia $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, m ir n neturi bendrų daliklių ($\frac{m}{n}$ – nesuprastinama trupmena)

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Laipsnio su racionaliuoju trupmeniniu rodikliu apibrėžtis:
 - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, čia $a > 0$; jeigu $a^{\frac{1}{n}} = b$, tai $b^n = a$
 - $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, čia $a > 0$; jeigu $a^{\frac{m}{n}} = b$, tai $b^{\frac{n}{m}} = a$
- Laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybės:
 - Sandaugos laipsnio savybė: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
 - Dalmens (trupmenos) laipsnio savybė: $(a : b)^c = a^c : b^c$, $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$
- Veiksmų su laipsniais, kurių rodikliai yra racionalieji, savybės:
 - Laipsnių su vienodais pagrindais sandaugos savybė: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
 - Laipsnių su vienodais laipsnių rodikliais sandaugos savybė: $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$
 - Laipsnių su vienodais pagrindais dalmens savybė: $a^b : a^c = a^{b-c}$

- Laipsnių su vienodais laipsnių rodikliais dalmens (trupmenos, kurios skaitiklis ir vardiklis yra laipsniai su vienodais rodikliais) savybė: $a^c : b^c = (a : b)^c$, $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
- Laipsnio kėlimo laipsniu savybė: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Aiškinama(si) laipsnio su racionaliuoju rodikliu $a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) samprata.
2. Primenamos veiksmų su sveikaisiais laipsniais savybės $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(a : b)^m = a^m : b^m$, pasakant, kad šios formulės tinka ir laipsniams su racionaliaisiais rodikliais.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių, kuriuose yra laipsnių su racionaliaisiais rodikliais reikšmes.
2. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra iracionalusis skaičius $a^{\frac{m}{n}}$.
3. Mokomasi naudotis skaičiuotuvu, skaičiuojant skaitinių reiškinių su racionaliaisiais rodikliais reikšmes bei jų apytiksles dešimtaines reikšmes.

1.4 tema „Šaknys“

^ Šaknys.

Apibendrinant šaknies sąvoką, pateikiamas n -tojo ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) laipsnio šaknies apibrėžimas.

Išsiaiškinama, pagrindžiama, kaip iracionalieji skaičiai $\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{N}$) atidedami skaičių tiesėje.

Praktikuojamasi skaičiuotuvu rasti apytikslę duotojo iracionaliojo skaičiaus $\sqrt[n]{a}$ reikšmę.

Aiškinamasi, kad n -tojo laipsnio šaknimis būdingos antrojo ir trečiojo laipsnių šaknų (ir veiksmų su jomis) savybės:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Mokoma(si) šias savybes taikyti, apskaičiuojant skaitinių reiškinių su šaknimis reikšmes, skaičių įkeliant po n -tojo laipsnio šaknimi ir iškeliant jį prieš šaknies ženklą.

Mokoma(si) trupmenos vardiklyje panaikinti iracionalumą, kai vardiklyje yra iracionalieji skaičiai

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{a} + b, \quad \sqrt{a} - b.$$

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknis
- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknies apytikslė reikšmė
- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknų savybės
- Veiksmų su n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknimis savybės
- Skaitinio dauginamojo įkėlimas į pošaknį ir iškėlimas prieš šaknį
- Šaknų naikinimas trupmenos vardiklyje
- Skaitinių reiškinių su šaknimis pertvarkymas, reikšmių skaičiavimas

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknis iš a :
 $\sqrt[n]{a}$, n – šaknies laipsnis, a – pošaknis

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknies $\sqrt[n]{a}$ apibrėžtis:
 - $(\sqrt[n]{a})^n = a$; jeigu $\sqrt[n]{a} = b$, tai $b^n = a$
 - $\sqrt[n]{a}$ apibrėžta, kai $a \in \mathbb{R}$
 - $\sqrt[n]{a}$ apibrėžta, kai $a \in [0; +\infty[$
 - $\sqrt[n]{a} \geq 0$
- n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknų savybės, formulės:
 - n -tojo laipsnio šaknis iš sandaugos: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
 - n -tojo laipsnio šaknis iš dalmens: $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
 - n -tojo laipsnio šaknis iš trupmenos: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 - n -tojo laipsnio šaknis iš šaknies: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- Veiksmų su n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) laipsnio šaknimis savybės, formulės:

- n -tojo laipsnio šaknų sandauga: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- n -tojo laipsnio šaknų dalmuo: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
- Trupmena, kurios skaitiklis ir vardiklis yra n -tojo laipsnio šaknys: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- Teigiamo dauginamojo įkėlimas į pošaknį: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
- Teigiamo dauginamojo iškėlimas prieš šaknį: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$
- Šaknies naikinimas trupmenos vardiklyje:
 - $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$
 - $\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-c)}{b-c^2}$
 - $\frac{a}{\sqrt{b}-c} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}+c)}{b-c^2}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Pateikiami lyginio ir nelyginio laipsnio šaknų apibrėžimai, paaiškinant, kaip jie siejasi su antrojo ir trečiojo laipsnio šaknų apibrėžimais.
2. Mokomasi, naudojantis Pitagoro teorema, skaičių tiesėje pažymėti iracionaliuosius skaičius $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...
3. Pateikiamos veiksmų su šaknimis savybės $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, jų teisingumą pagrindžiant ne tik skaitiniais pavyzdžiais, bet ir įrodant. Paaiškinama, kad šiomis formulėmis galima naudotis, kai jos parašytos atbulai. Tik šiuo atveju pravartu pastebėti, kad teisingos yra tokios formulės, pvz., $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su šaknimis reikšmes.
2. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra iracionalusis skaičius $\sqrt[n]{a}$.
3. Mokoma(si) teigiamą dauginamąjį įkelti po šaknies ženklą $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$, bei dauginamąjį iškelti prieš šaknies ženklą.
4. Mokoma(si) panaikinti iracionalumą trupmenos vardiklyje, kai vardiklyje yra iracionalieji skaičiai $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} - b$.

1.5 tema „Logaritmai“

^ Logaritmai.

Apibrėžiamos sąvokos: skaičiaus logaritmas, dešimtainis logaritmas. Praktikuojamasi skaičiuotuvu rasti apytikslę logaritmo reikšmę.

Pateikiama ir skaitiniais pavyzdžiais iliustruojama pagrindinė logaritmų tapatybė

$$a^{\log_a(b)} = b \quad (a > 0, b > 0, a \neq 1).$$

Įrodomos ir pagrindžiamos veiksmų su logaritmais savybės:

$$\log_c(a) + \log_c(b) = \log_c(a \cdot b),$$

$$\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c(a : b),$$

$$k \cdot \log_c(a) = \log_c(a^k) \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, k \in \mathbb{Q}),$$

paaiškinant, kad šias lygybes galima taikyti ir atbulai. Mokoma(si) šias savybes taikyti, skaičiuojant skaitinių reiškinių su logaritmais reikšmes.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Logaritmas, logaritmo pagrindas
- Logaritmas pagrindu a
- Logaritmas pagrindu a skaičiaus b
- Dešimtainis logaritmas
- Logaritmo apibrėžimo sritis
- Veiksmų su logaritmais savybės
- Logaritmų savybės
- Pagrindinė logaritmų tapatybė
- Apytikslė logaritmo reikšmė
- Skaitinių logaritminių reiškinių pertvarkymas, reikšmių skaičiavimas

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Logaritmo žymuo: $\log$
- skaičiaus b Logaritmas pagrindu a skaičiaus b : $\log_a(b)$, arba $\log_a b$
- Dešimtainio logaritmo žymuo: $\lg$, arba $\log_{10}$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Logaritmo $\log_a(b)$ apibrėžtis:
 - $a^{\log_a(b)} = b$, čia $a > 0, a \neq 1, b > 0$; jeigu $\log_a(b) = c$, tai $a^c = b$
 - $\log_a(b)$ neturi prasmės, kai $a \leq 0$, kai $a = 1$, kai $b \leq 0$
- Veiksmų su logaritmais savybės, formulės:
 - Logaritmų su vienodais pagrindais suma: $\log_c(a) + \log_c(b) = \log_c(a \cdot b)$
 - Logaritmų su vienodais pagrindais skirtumas: $\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c(a : b)$
 - Skaičiaus ir logaritmo sandauga: $d \cdot \log_c(a) = \log_c(a^d)$

- Logaritmų savybės, formulės:
 - Sandaugos logaritmas: $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$, čia $a, b > 0$
 - Dalmens (trupmenos) logaritmas: $\log_c(a : b) = \log_c(a) - \log_c(b)$, čia $a, b > 0$
 $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$, čia $a, b > 0$
 - Laipsnio su racionaliuoju rodikliu logaritmas: $\log_c(a^b) = b \cdot \log_c(a)$
- Pagrindinė logaritminė tapatybė: $a^{\log_a(b)} = b$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Įvedami mokiniams nepažįstami skaičiai, kurie rašomi naudojantis žymeniu „log“: skaičius, kuriuo pakėlę skaičių a gauname skaičių b , rašomas taip $\log_a(b)$. Kitaip sakant, lygties $a^x = b$ sprendinys yra skaičius $x = \log_a(b)$. Paaiškinama, kad ne su visomis realiosiomis a ir b reikšmėmis logaritmas turi prasmę – jis prasmingas, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, ir paaiškinama, kodėl reikalingi šie apribojimai.
2. Įvedama dešimtainio logaritmo sąvoka.
3. Pateikiamos ir įrodomos veiksmų su logaritmais savybės: $\log_c(a) + \log_c(b) = \log_c(a \cdot b)$, $\log_c(a) - \log_c(b) = \log_c(a : b)$, $k \cdot \log_c(a) = \log_c(a^k)$ ($a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, k \in \mathbb{Q}$), paaiškinant, kad šias lygybes galima taikyti ir atbulai.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) nustatyti tarp kokių gretimų sveikųjų skaičių yra skaičius $\log_a(b)$.
2. Mokoma(si) rasti tiksliai arba apytiksliai logaritmų reikšmes (naudojantis ir skaičiuotuviu).
3. Naudojantis logaritmo apibrėžtimi ($a^{\log_a(b)} = b$), mokoma(si) bet kurį teigiamą skaičių b parašyti kaip laipsnį norimu teigiamu, nelygiu 1, pagrindu, pvz., $2 = 3^{\log_3(2)}$.
4. Mokoma(si) apskaičiuoti skaitinių reiškinių su logaritmais reikšmes.

1.6 tema „Sinusas, kosinusas ir tangentas“

^ Sinusas, kosinusas ir tangentas.

Apibrėžiamas posūkio kampas, vienetinis apskritimas ir tangentų tiesė ($x = 1$).

Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamas posūkio kampo sinusas ir kosinusas. Naudojantis tangentų tiese, apibrėžiamas posūkio kampo tangentas.

Praktikuojamasi, naudojantis vienetiniu apskritimu ir tangentų tiese, apskaičiuoti tiksliai sinuso, kosinuso, tangento reikšmes, kai posūkio kampas lygus

$0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 120^\circ, \pm 135^\circ, \pm 150^\circ, \pm 180^\circ, \pm 210^\circ, \pm 225^\circ, \pm 240^\circ, \pm 270^\circ, \pm 300^\circ, \pm 315^\circ, \pm 330^\circ, \pm 360^\circ$.

Tuo pačiu metodu parodoma, kad skaičiai $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ turi prasmę su visomis realiosiomis α reikšmėmis, kodėl $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ reikšmės kartojasi kas 360° ir visuomet priklauso intervalui $[-1; 1]$.

Aptariama, kodėl $\operatorname{tg}(\alpha)$ reikšmės yra intervalo $(-\infty; +\infty)$ skaičiai ir kodėl jos kartojasi kas 180° .

Išrodomos formulės:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha);$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos(\alpha),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha), \quad k \in \mathbb{Z};$$

mokoma(si) jas taikyti.

Apibrėžiami skaičiai $\arcsin(a)$ ir $\arccos(a)$, pagrindžiant, kodėl $\arcsin(a) \in [-90^\circ; 90^\circ]$, $\arccos(a) \in [0; 180^\circ]$, o arkisinusas ir arkkosinusas turi prasmę, kai $a \in [-1; 1]$.

Apibrėžiami skaičiai $\operatorname{arctg}(a)$ ($a \in \mathbb{R}$), pagrindžiant, kodėl $\operatorname{arctg}(a) \in (-90^\circ; 90^\circ)$, o arktangentas turi prasmę visoje realiųjų skaičių aibėje.

Praktikuojamasi apskaičiuoti tiksliai ir apytiksles sinuso, kosinuso, tangento ir arkisinuso, arkkosinuso, arktangento reikšmes.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Vienetinis apskritimas
- Posūkio kampas
- Tangentų tiesė
- Posūkio kampo sinusas, kosinusas, tangentas
- Posūkio kampo sinuso, kosinuso, tangento apibrėžimo ir reikšmių sritys
- Arkisinusas
- Arkkosinusas
- Arktangentas
- Arkisinuso, arkkosinuso, arktangento apibrėžimo ir reikšmių sritys
- Sinuso, kosinuso, tangento, arkisinuso, arkkosinuso, arktangento tikslų ir apytikslių reikšmių skaičiavimas

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Vienetinis apskritimas: $w(O(0; 0); 1)$
- Sinuso žymuo: $\sin$
- Kosinuso žymuo: $\cos$
- Tangento žymuo: tg , arba $\tan$
- Posūkio kampo α sinusas: $\sin(\alpha)$
- Posūkio kampo α kosinusas: $\cos(\alpha)$
- Posūkio kampo α tangentas: $\operatorname{tg}(\alpha)$, arba $\tan(\alpha)$
- Arkosinuso žymuo: $\arcsin$
- Arkkosinuso žymuo: $\arccos$
- Arktangento žymuo: arctg , arba $\arctan$
- Skaičiaus $a \in [-1; 1]$ arksinusas: $\arcsin(a)$
- Skaičiaus $a \in [-1; 1]$ arkkosinusas: $\arccos(a)$
- Skaičiaus a arktangentas: $\operatorname{arctg}(a)$, arba $\arctan(a)$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Tangentų tiesės lygtis: $x = 1$
- Posūkio kampo α sinuso $\sin(\alpha)$ samprata:
 - $\sin(\alpha) = y_A$, čia y_A – posūkio kampą α atitinkančio spindulio ir vienetinio apskritimo sankirtos taško ordinatė, – apibrėžtis
 - $\sin(\alpha) \in [-1; 1]$
 - $\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin(\alpha)$, čia $k \in \mathbb{Z}$
 - $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- Posūkio kampo α kosinuso $\cos(\alpha)$ samprata:
 - $\cos(\alpha) = x_A$, čia x_A – posūkio kampą α atitinkančio spindulio ir vienetinio apskritimo sankirtos taško abscisė, – apibrėžtis
 - $\cos(\alpha) \in [-1; 1]$
 - $\cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos(\alpha)$, čia $k \in \mathbb{Z}$
 - $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- Posūkio kampo α tangento $\operatorname{tg}(\alpha)$ samprata:
 - $\operatorname{tg}(\alpha) = y_A$, čia y_A – posūkio kampą α atitinkančio spindulio ir tangentų tiesės sankirtos taško ordinatė, – apibrėžtis
 - $\operatorname{tg}(\alpha) \in]-\infty; +\infty[$
 - $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha)$, čia $k \in \mathbb{Z}$
 - $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$
 - Kai $\alpha = 90^\circ + 180^\circ \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, tai $\operatorname{tg}(\alpha)$ neturi prasmės, neapibrėžtas
- Skaičiaus $a \in [-1; 1]$ arksinuso $\arcsin(a)$ samprata:
 - $\sin(\arcsin(a)) = a$; jeigu $\arcsin(a) = b$, tai $\sin(b) = a$
 - $\arcsin(a) \in [-90^\circ; 90^\circ]$
- Skaičiaus $a \in [-1; 1]$ arkkosinuso $\arccos(a)$ samprata:
 - $\cos(\arccos(a)) = a$; jeigu $\arccos(a) = b$, tai $\cos(b) = a$
 - $\arccos(a) \in [0^\circ; 180^\circ]$
- Skaičiaus a arktangento $\operatorname{arctg}(a)$ samprata:
 - $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(a)) = a$; jeigu $\operatorname{arctg}(a) = b$, tai $\operatorname{tg}(b) = a$
 - $\operatorname{arctg}(a) \in]-90^\circ; 90^\circ[$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

- Įterpti $a \in [-1; 1]$ sakinyje „Apibrėžiami skaičiai $\arcsin(a)$ ir $\arccos(a)$ ($a \in [-1; 1]$), [...]“

Rekomendacijos.*Teorija.*

1. Apibrėžiamas posūkio kampas, vienetinis apskritimas ir tangentų tiesė ($x = 1$). Kalbėdami apie vienetinį apskritimą, įrodykite jo lygtį ($x^2 + y^2 = 1$). Taip pat galima įrodyti ir lygtį apskritimo, kurio centras yra taške $(a; b)$, o spindulio ilgis lygus r ($(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$).
2. Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamas posūkio kampo sinusas ir kosinusas. Prisiminkite pagrindinę trigonometrinių tapatybę ($\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$) ir jos įrodymą.
3. Naudojantis tangentų tiese, apibrėžiamas posūkio kampo tangentas. Prisiminkite to paties kampo sinusą, kosinusą ir tangentą siejančią formulę ($\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$).
4. Naudojantis vienetiniu apskritimu ir tangentų tiese bei Pitagoro teorema ir stačiojo trikampio savybėmis, mokoma(si) apskaičiuoti tiksliai sinuso, kosinuso, tangento (kai jos egzistuoja) reikšmes, kai posūkio kampas lygus $\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 120^\circ, \pm 135^\circ, \pm 150^\circ, \pm 180^\circ, \pm 210^\circ, \pm 225^\circ, \pm 240^\circ, \pm 270^\circ, \pm 300^\circ, \pm 315^\circ, \pm 330^\circ, \pm 360^\circ$.
5. Parodoma, kad skaičiai $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ turi prasmę su visomis realiosiomis α reikšmėmis, kodėl $\sin(\alpha)$ ir $\cos(\alpha)$ reikšmės kartojasi kas 360° ir visuomet priklauso intervalui $[-1; 1]$.
6. Aptariama, kodėl $\operatorname{tg}(\alpha)$ reikšmės yra intervalo $(-\infty; +\infty)$ skaičiai ir kodėl jos kartojasi kas 180° .
7. Įrodomos formulės: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$; mokoma(si) jas taikyti.
8. Apibrėžiami skaičiai $\arcsin(a)$ ir $\arccos(a)$, pagrindžiant, kodėl $\arcsin(a) \in [-90^\circ; 90^\circ]$, $\arccos(a) \in [0; 180^\circ]$, o arkisinusas ir arkkosinusas turi prasmę tik intervale $[-1; 1]$. Paaiškinama, kam reikalingi arkisinusas ir arkkosinusas – šių skaičių prisireikia užrašant lygčių $\sin(x) = a$ ($a \in [-1; 1]$) sprendinius.
9. Apibrėžiamas skaičius $\operatorname{arctg}(a)$ ($a \in \mathbb{R}$), pagrindžiant, kodėl $\operatorname{arctg}(a) \in (-90^\circ; 90^\circ)$, o arktangentas turi prasmę visoje realiųjų skaičių aibėje. Paaiškinama, kad arktangento prisireikia užrašant lygčių $\operatorname{tg}(x) = a$ ($a \in [-1; 1]$) sprendinius.

Uždaviniai.

1. Praktikuojamasi apskaičiuoti tiksliai ir apytiksles (naudojantis ir skaičiuotuvu) sinuso, kosinuso, tangento ir arkisinuso, arkkosinuso, arktangento reikšmes.
2. Mokoma(si) apskaičiuoti trigonometrinių reiškinių reikšmes.
3. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose reikia apskaičiuoti $\cos(\alpha)$ ($\sin(\alpha)$) reikšmę, žinant $\sin(\alpha)$ ($\cos(\alpha)$) reikšmę ir ketvirtį, kuriam priklauso kampas α .
4. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose reikia apskaičiuoti $\operatorname{tg}(\alpha)$ reikšmę, žinant $\sin(\alpha)$ ar $\cos(\alpha)$ reikšmę ir ketvirtį, kuriam priklauso kampas α .

2 sritis „Modeliai ir sąryšiai“

2.1 tema „Progresijos“

^ Progresijos.

Apibrėžiama, kokios skaičių sekos vadinamos aritmetinėmis progresijomis ir kokios – geometrinėmis progresijomis.

Apibrėžiamos sąvokos: skaičių sekos pirmasis narys, n -tasis narys, begalinė skaičių seka, baigtinė skaičių seka, aritmetinės progresijos skirtumas, geometrinės progresijos vardiklis.

Randomi sekos nariai rekurentiniu būdu.

Praktikuojamasi nustatyti ir pagrįsti, ar seka yra aritmetinė progresija, geometrinė progresija.

Išrodomos ir įvairiems uždaviniams spręsti taikomos aritmetinės progresijos ir geometrinės progresijos n -tojo nario formulės, pirmųjų n narių sumos formulės:

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n,$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \quad (n \in \mathbb{N}, q \neq 1).$$

Atliekami kūrybiniai projektiniai darbai (pavyzdžiui, Kocho snaigė, vėžlio ir bėgiko problema).

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Skaičių seka
- Baigtinė skaičių seka
- Begalinė skaičių seka
- Skaičių sekos pirmasis narys
- Skaičių sekos n -tasis ($n \in \mathbb{N}$) narys
- Skaičių sekos n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) nario formulė
- Skaičių sekos pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių suma
- Skaičių seka, apibrėžta rekurentiškai
- Progresija
- Aritmetinė progresija
- Aritmetinės progresijos skirtumas
- Aritmetinės progresijos pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių suma, sumos formulė
- Geometrinė progresija
- Geometrinės progresijos vardiklis
- Geometrinės progresijos pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių suma, sumos formulė
- Kocho snaigė
- Vėžlio ir bėgiko problema

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Skaičių seka: (c_n)
- Skaičių sekos (c_n) pirmasis narys: c_1
- Skaičių sekos (c_n) n -tasis ($n \in \mathbb{N}$) narys: c_n
- Skaičių sekos (c_n) n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) nario formulė: $c_n = f(n)$
- Skaičių sekos (c_n) pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių suma: S_n

- Aritmetinė progresija: (a_n)
- Aritmetinės progresijos skirtumas: d ($d \neq 0$)
- Geometrinė progresija: (b_n)
- Geometrinės progresijos vardiklis: q ($q \neq 1$)

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Aritmetinės progresijos (a_n) formulės:
 - Aritmetinės progresijos skirtumo formulė: $d = a_{n+1} - a_n$, čia $n \in \mathbb{N}, d \neq 0$
 - Aritmetinės progresijos n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) nario formulė: $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$, čia $d \neq 0$
 - Aritmetinės progresijos pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių sumos formulės:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n, \text{ čia } d \neq 0$$
- Geometrinės progresijos (b_n) formulės:
 - Geometrinės progresijos vardiklio formulė: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, čia $n \in \mathbb{N}, q \neq 1$
 - Geometrinės progresijos n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) nario formulė: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, čia $q \neq 1$
 - Geometrinės progresijos pirmųjų n ($n \in \mathbb{N}$) narių sumos formulės:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}, \text{ čia } q \neq 1$$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

- Išplėstiniame kurse neminimos rekurentiškai apibrėžtos sekos, čia jų irgi nereikia (buvo 9–10 kl.)
- Po aritmetinės progresijos n -tojo ($n \in \mathbb{N}$) nario ir pirmųjų n narių sumos formulių įterpti: ($n \in \mathbb{N}, d \neq 0$)

Rekomendacijos.

Teorija. Aritmetinė progresija.

1. Primenama, ką vadiname skaičių seka, sekų reiškimo būdus (surašant sekos narius arba užrašant keletą pirmųjų jos narių, nurodant sekos n -tojo nario formulę, seką nurodant rekurentiškai).
2. Primenamos lyginių ir nelyginių skaičių sekos bei jų n -tojo nario formulės.
3. Nagrinėjamos skaičių sekos, kurios vadinamos aritmetinėmis progresijomis:
 - pateikiama apibrėžtis, sąvokos, žymenys, pavyzdžiai,
 - įrodomos n -tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formulės.
4. Galima pateikti ir pavyzdžiais pagrįsti viduriniojo nario savybę.

Uždaviniai. Aritmetinė progresija.

1. Mokoma(si) iš duotųjų sekų atpažinti aritmetines progresijas, užrašyti įvairias aritmetines progresijas (surašant pirmuosius narius), kai yra žinomas jos pirmasis narys ir skirtumas, kai seka nurodyta rekurentiškai, kai žinoma jos n -tojo nario formulė ir panašiai.
2. Mokoma(si) apskaičiuoti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą.
3. Sprendžiami įvairūs įvairaus pobūdžio uždaviniai.
4. Pravartu apskaičiuoti natūraliųjų skaičių sumas nuo 1 iki 9 (10), nuo 1 iki 99 (100), nuo 1 iki 999 (1000), ... ir pastebėti sumų sekos dėsningumus.

Teorija. Geometrinė progresija.

1. Nagrinėjamos skaičių sekos, kurios vadinamos geometrinėmis progresijomis:

- pateikiamas apibrėžtis, sąvokos, žymenys, pavyzdžiai,
- įrodomos n -tojo nario ir pirmųjų n narių sumos formulės.

2. Galima pateikti ir pavyzdžiais pagrįsti viduriniojo nario savybę.

Uždaviniai. Geometrinė progresija.

1. Mokoma(si) iš duotųjų sekų atpažinti geometrines progresijas, užrašyti įvairias geometrines progresijas (surašant pirmuosius narius), kai yra žinoma jos pirmasis narys ir vardiklis, kai seka nurodyta n -tojo nario formule ir panašiai.

2. Mokomasi apskaičiuoti geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumą.

3. Sprendžiami įvairūs įvairaus pobūdžio uždaviniai.

4. Pravartu panagrinėti „Vėžlio ir bėgiko problemą“, pagrindžiant, kad $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$, nors nykstamoji geometrinės progresija ir neįeina į bendrojo kurso programą.

5. Pravartu panagrinėti Kocho snaigę, pasakant, kad jos perimetras yra begalinis, plotas – baigtinis.

2.2 tema „Funkcijos“

^ Funkcijos.

Funkcijos samprata. Plėtojama samprata apie funkcijas ir jų savybes. Apibrėžiamos sąvokos: lyginė funkcija; nelyginė funkcija; nei lyginė, nei nelyginė funkcija; periodinė funkcija. Nagrinėjant pavyzdžius, išsiaiškinama, kaip taikyti šiuos apibrėžimus, sprendžiant uždavinius, ir kaip pagal grafiką nustatyti funkcijos lygumą, periodiškumą.

Aptariama funkcijos $y = f(x)$ ($x \in D_f$) grafiko transformacijos samprata. Naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis, tyrinėjama, kaip atliekamos

$$y = f(x) + a, \quad y = f(x + a), \quad y = -f(x), \quad y = a \cdot f(x)$$

formulėmis aprašomos transformacijos.

Atliekami tiriamieji, kūrybiniai darbai apie funkcijas, jų savybes, transformacijas ir jų pasireiškimą įvairaus konteksto situacijose.

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Primenama, ką vadiname funkcija, funkcijos grafiku, funkcijų reiškimo būdus, sąvokas, žymenis.
2. Apibrėžiamos sąvokos: lyginė funkcija; nelyginė funkcija; nei lyginė, nei nelyginė funkcija; periodinė funkcija.
3. Nagrinėjamos funkcijų $y = f(x)$ grafikų transformacijos $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = a \cdot f(x)$.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si), naudojantis apibrėžimais ir grafiškai, nustatyti funkcijos lygumą, periodiškumą.
2. Mokoma(si) nustatyti, ar pateikta kreivė yra funkcijos grafikas.
3. Sprendžiami su funkcijų grafikų transformacijomis susiję uždaviniai.

Laipsninė ir šaknies funkcijos. Apibrėžiamos ir tiriamos laipsninė funkcija

$$y = f(x) = x^n, \text{ kai } n \in \{-1; 1; 2; 3\},$$

šaknies funkcijos

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ kai } n \in \{2; 3\}.$$

Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės.

Mokoma(si) atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, parašyti funkcijų formules, kai nurodytas funkcijos grafikui priklausantis taškas.

Nagrinėjami praktinių situacijų, kurios aprašomos ar modeliuojamos laipsninėmis ir šaknies funkcijomis, pavyzdžiai.

Rekomendacijos.

Teorija.

1. Primenamos funkcijos $y = f(x) = x$, x^2 bei su jomis susijusios transformacijos.
2. Nagrinėjama funkcija $y = f(x) = \frac{1}{x}$ bei su ja susijusios funkcijos $y = f(x) = \frac{k}{x}, \frac{k}{x+a}, \frac{k}{x+a} + b$.
3. Nagrinėjama funkcija $y = f(x) = x^3$ bei su ja susijusios funkcijos $y = f(x) = ax^3, (x+b)^3, x^3 + c, a(x+b)^3 + c$.
4. Nagrinėjamos funkcijos $y = f(x) = \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ bei su jomis susijusios funkcijos $y = a\sqrt{x+b} + c, y = a\sqrt[3]{x+b} + c$.
5. Pravartu pastebėti, kad funkcijų $y = f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) ir $y = f(x) = \sqrt{x}$ bei funkcijų $y = f(x) = x^3$ ir $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) nubraižyti programoje nurodytų funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.
2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso funkcijos grafikui.
3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti funkcijos formulę.
4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Rodiklinė ir logaritminė funkcijos. Apibrėžiama rodiklinė funkcija

$$y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1),$$

logaritminė funkcija

$$y = f(x) = \log_a(x) \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės. Mokomasi atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, parašyti funkcijų formules, kai nurodytas funkcijos grafikui priklausantis taškas.

Nagrinėjami praktinių situacijų, kurios aprašomos ar modeliuojamos rodiklinėmis ar logaritminėmis funkcijomis, pavyzdžiai.

Rekomendacijos.

Teorija. Rodiklinė funkcija.

1. Pateikiama funkcijos $y = f(x) = a^x$ samprata, paaiškinant, kad:
 - laipsnis turi prasmę ir kai jo rodiklis yra iracionalus;
 - rodiklinės funkcijos laipsnio pagrindas turi būti didesnis už 0 ir nelygus 1.
2. Nagrinėjami rodiklinių funkcijų $y = f(x) = a^x$ pavyzdžiai, vietoj a imant 2, 3; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tiriamos šių funkcijų savybės.
3. Pastebima, kad rodiklinių funkcijų, kurių rodikliai yra atvirkštiniai skaičiai, grafikai yra vienas kitam simetriški ordinačių ašies atžvilgiu.
4. Apibendrinant nusakomos funkcijų $y = f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ir $y = f(x) = a^x$, kai $a > 1$, savybės.
5. Nagrinėjamos programoje nurodytos transformacijos.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) nubraižyti rodiklinių funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.
2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso rodiklinės funkcijos grafikui.
3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti rodiklinės funkcijos (ir transformuotos) formulę.
4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Teorija. Logaritminė funkcija. 1. Pateikiama funkcijos $f(x) = \log_a(x)$ samprata, paaiškinant, kad (ir kodėl) logaritminė funkcija turi prasmę, kai logaritmo pagrindas yra didesnis už 0 ir nelygus 1, o logaritmo skaičius yra teigiamas ($a > 0, a \neq 1, x > 0$);

2. Nagrinėjami logaritminių funkcijų $y = f(x) = \log_a(x)$ pavyzdžiai, vietoj a imant 2, 3; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tiriamos šių funkcijų savybės.
3. Pastebima, kad logaritminių funkcijų, kurių rodikliai yra atvirkštiniai skaičiai, grafikai yra vienas kitam simetriški abscisų ašies atžvilgiu.
4. Apibendrinant nusakomos funkcijų $y = f(x) = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ ir $y = f(x) = \log_a(x)$, kai $a > 1$, savybės.
5. Pastebima, kad funkcijų $y = f(x) = a^x$ ir $y = f(x) = \log_a(x)$ grafikai yra simetriški vienas kitam tiesės $y = x$ atžvilgiu.
6. Nagrinėjamos programoje nurodytos transformacijos.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) nubraižyti įvairių logaritminių funkcijų grafikų eskizus, kai žinoma funkcijos formulė.
2. Mokoma(si) apskaičiuoti, ar taškas priklauso logaritminės funkcijos grafikui.
3. Mokoma(si) iš pateiktų grafikų eskizų atpažinti, nustatyti logaritminės funkcijos (ir transformuotos) formulę.
4. Grafiškai sprendžiamos lygtys ir nelygybės.

Trigonometrinės funkcijos. Naudojantis vienetiniu apskritimu, apibrėžiamos bet kokio posūkio kampo (išreikšto laipsniais) sinuso ir kosinuso funkcijos, o naudojantis tangentų tiese ($x = 1$), apibrėžiama tangento funkcija.

Braižomi sinusoidės, kosinusoidės ir tangentoidės grafikų eskizai. Išsiaiškinami charakteringi taškai, priklausantys šių funkcijų grafikams, tiriamos funkcijų savybės. Mokoma(si) atpažinti funkcijas iš jų grafikų eskizų, rasti nurodytas sąlygas, atitinkančias argumento ir funkcijos reikšmes (pavyzdžiui, didžiausią funkcijos reikšmę nurodytame intervale). Praktikuojamasi, naudojantis grafiko eskizu, užrašyti visas argumento reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja tam tikrą reikšmę, yra didėjančioji ar mažėjančioji, yra teigiamoji ar neigiamoji.

Mokoma(si), naudojantis sinuso, kosinuso ir tangento samprata ir (ar) pasitelkus grafinį metodą, spręsti

$$\sin(x) = a, \quad \cos(x) = a, \quad \operatorname{tg}(x) = a$$

pavidalo lygtis.

Rekomendacijos.*Teorija.*

1. Prisimenamas vienetinis apskritimas ir posūkio kampas; posūkio kampo sinusas bei kosinusas.
2. Braižoma sinusoidė ir kosinusoidė ir aptariamos sinuso funkcijos ir kosinuso funkcijos savybės. Pravartu pastebėti, kad kosinuso grafiką galima gauti pastumiant sinuso grafiką ($\sin(x + 90^\circ) = \cos(x)$).
3. Naudojantis grafikais tiriamos funkcijų savybės.
4. Primenama tangentų tiesė ir posūkio kampo tangento samprata.
5. Braižomas tangento grafikas ir aptariamos tangento funkcijos savybės.

Uždaviniai.

1. Mokoma(si) atpažinti trigonometrinės funkcijos formulę, kai žinomas funkcijos grafikas.
2. Mokoma(si) nustatyti trigonometrinių funkcijų savybes.
3. Grafiškai sprendžiamos paprasčiausios trigonometrinės lygtys.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Funkcija
- Funkcijos argumentas (funkcijos nepriklausomasis kintamasis)
- Funkcijos reikšmė (funkcijos priklausomasis kintamasis)
- Funkcijos apibrėžimo sritis (funkcijos apibrėžimo srities aibė)
- Funkcijos reikšmių sritis (funkcijos reikšmių srities aibė)

- Funkcijos apibrėžimo srities taškas (funkcijos taškas)
- Funkcijos reikšmių srities taškas
- Funkcijos formulė
- Funkcijos reikšmių lentelė
- Funkcijos grafikas
- Funkcijos grafiko eskizas
- Funkcijos grafiko taškas
- Funkcijos grafiko taško koordinatės (abscisė, ordinatė)
- Funkcijos savybės
- Lyginė funkcija
- Nelyginė funkcija
- Nei lyginė, nei nelyginė funkcija
- Periodinė funkcija
- Periodinės funkcijos periodas, mažiausias teigiamas periodas
- Funkcijos nuliai
- Funkcijos didžiausia, mažiausia reikšmė
- Didėjančioji, mažėjančioji funkcija
- Funkcijos apibrėžimo srities intervalai, kuriuose funkcija yra didėjančioji, mažėjančioji
- Teigiamoji, neigiamoji funkcija
- Funkcijos apibrėžimo srities intervalai, kuriuose funkcija yra teigiamoji, neigiamoji
- Funkcijos (ir jos grafiko) transformacijos
- Laipsninė funkcija
- Šaknies funkcija
- Rodiklinė funkcija
- Logaritminė funkcija
- Pagrindinės trigonometrinės funkcijos:
 - Sinuso funkcija
 - Kosinuso funkcija
 - Tangento funkcija
- Sinusoidė, kosinusoidė, tangentoidė
- Grafinis, lygčių, nelygybių sprendimas

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Funkcija: $y = f(x)$, arba $x \xrightarrow{f} y$, arba $f(x)$
- Funkcijos $y = f(x)$ argumentas (funkcijos nepriklausomasis kintamasis): x
- Funkcijos $y = f(x)$ reikšmė (funkcijos priklausomasis kintamasis): y
- Funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis (funkcijos apibrėžimo srities aibė): D_f
- Funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritis (funkcijos reikšmių srities aibė): E_f
- Funkcijos $y = f(x)$ grafikas: Koordinačių plokštumos taškų $(x; y) = (x; f(x))$ aibė
- Funkcijos $y = f(x)$ didžiausia reikšmė: $\max f(x)$
- Funkcijos $y = f(x)$ didžiausia reikšmė intervale $[a; b]$ (kai $x \in [a; b]$): $\max_{[a; b]} f(x)$, arba $\max_{x \in [a; b]} f(x)$
- Funkcijos $y = f(x)$ mažiausia reikšmė: $\min f(x)$

- Funkcijos $y = f(x)$ mažiausia reikšmė intervale $[a; b]$ (kai $x \in [a; b]$): $\min_{x \in [a; b]} f(x)$, arba $\min_{x \in [a; b]} f(x)$
- Didėjančioji funkcija $y = f(x)$: $f(x) \nearrow$
- Mažėjančioji funkcija $y = f(x)$: $f(x) \searrow$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Laipsninė funkcija: $y = f(x) = x^n$, čia $n \in \mathbb{Z}$ (nagrinėjama, kai $n \in \{-1; 1; 2; 3\}$)
- Šaknies funkcija: $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, čia $n \in \mathbb{N}$ (nagrinėjama, kai $n \in \{2; 3\}$)
- Rodiklinė funkcija: $y = f(x) = a^x$, čia $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$; kai $a = 1$, tai $f(x) = 1$
- Logaritminė funkcija: $y = f(x) = \log_a(x)$, čia $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
- Pagrindinės trigonometrinės funkcijos:
 - Sinuso funkcija: $y = f(x) = \sin(x)$, čia $x \in \mathbb{R}$ (laipsniais)
 - Kosinuso funkcija: $y = f(x) = \cos(x)$, čia $x \in \mathbb{R}$
 - Tangento funkcija: $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)$, čia $x \notin \{90^\circ + 180^\circ \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

- Kaip sakyti: ar funkcijos transformacijos, ar funkcijos grafiko transformacijos, ar abejaip (išplėstiniame – abejaip)?

2.3 tema „Lygtys“

^ Lygtys.

Racionaliosios lygtys. Apibendrinamos, gilinamos ir plečiamos žinios apie racionaliąsias lygtis ir jų sprendimo būdus. Mokoma(si) atpažinti ir spręsti

$$a \cdot x^n + b = 0 \quad (a, b - \text{racionalieji skaičiai, } n \in \{2; 3; 4; 5\}),$$

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \quad (f(x), g(x) - \text{ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai})$$

pavidalo lygtis; lygtis, kurios suvedamos į kvadratinę lygtį.

Praktikuojamasi grafiškai spręsti $f(x) = g(x)$, kai $y = f(x)$, $y = g(x)$ yra tiesinė funkcija, kvadratinė funkcija, laipsninė funkcija, pavidalo lygtis.

Pasitelkus pavyzdžius, aiškinamasi, kad tikslius lygties sprendinius gauname, sprenddami algebiškai, o grafiškai dažniausiai gaunami apytiksliai sprendiniai.

Mokoma(si), sprendžiant tekstinius ar geometrijos uždavinius, sudaryti lygtį, ją išspręsti ir atrinkti uždavinio sąlygą atitinkantį atsakymą.

Iracionaliosios lygtys. Apibrėžiama iracionaliosios lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti iracionaliąsias

$$b \cdot \sqrt{f(x)} + a = 0, \quad b \cdot \sqrt[3]{f(x)} = a$$

($f(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianaris, a, b – racionalieji skaičiai, $a \neq 0$) pavidalo lygtis.

Analizuojama, kodėl ir kada gautuosius pertvarkytosios lygties sprendinius būtina tikrinti, kodėl tarp pertvarkytosios lygties sprendinių gali atsirasti tokių, kurie nėra duotosios iracionaliosios lygties sprendiniai.

Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos iracionaliosiomis lygtimis.

Rodiklinės lygtys. Apibrėžiama rodiklinės lygties sąvoka. Mokoma(si) algebiškai spręsti rodiklines lygtis, suvedant jas į pavidalą:

$$a^{f(x)} = a^r \quad (r \in \mathbb{Q}), \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$(f(x), g(x))$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai).

Praktikuojamasi rodiklines lygtis spręsti grafiškai.

Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos rodikline funkcija, pavyzdžiui:

$$f(n) = k \cdot a^n, \quad S(n) = S_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n.$$

Logaritminės lygtys. Apibrėžiama logaritminės lygties sąvoka. Mokoma(si) spręsti logaritmines

$$\log_a(f(x)) + b = 0, \quad \log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

$(f(x))$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu antrojo laipsnio daugianariai) lygtis.

Analizuojama, kada ir kodėl būtina atsižvelgti į logaritmo apibrėžimo sritį, gautuosius sprendinius tikrinti (juos įrašant į duotąją lygtį).

Sprendžiami uždaviniai, kuriuose situacijos modeliuojamos logaritminėmis lygtimis.

Tekstiniai uždaviniai. Apibendrinamos ir gilinamos žinios algebiškai sprendžiant įvairias dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.

Mokoma(si) įvairaus konteksto situacijas modeliuoti lygčių sistemomis.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Racionalioji lygtis
- Iracionalioji lygtis:
 - Lygtis, kurioje nežinomasis yra po kvadratinės šaknies ženklu
 - Lygtis, kurioje nežinomasis yra po kubinės šaknies ženklu
- Rodiklinė lygtis
- Logaritminė lygtis
- Lygties algebrinis sprendimas
- Lygties grafinis sprendimas
- Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Racionaliosios lygties Su vienu nežinomuoju x standartinis pavidalas: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- Laipsninės n -ojo laipsnio ($n \in \mathbb{N}$) lygties standartinis pavidalas:
 $a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \dots + q \cdot x + w = 0$, čia $a, b, \dots, q, w \in \mathbb{R}, a \neq 0$
 Nagrinėjamos laipsninės lygtys, kurių pavidalas yra:
 - $a \cdot x^n + b = 0$, čia $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0, n \in \{2; 3; 4; 5\}$
 - $f(x) \cdot g(x) = 0$, čia $f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesniojo negu antrojo laipsnio daugianariai
- Pirmojo laipsnio lygties standartinis pavidalas:
 $ax + b = 0$, čia $a, b \in \mathbb{R}$, – lygties parametrai (koeficientai), x – lygties nežinomasis

- Antrojo laipsnio lygties standartinis pavidalas:
 $ax^2 + bx + c = 0$, čia $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, – lygties parametrai (koeficientai), x – lygties nežinomasis
- Trupmeninės racionaliosios lygties standartinis pavidalas: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- Lygties su dviem nežinomaisiais x ir y standartinis pavidalas: $f(x, y) = 0$
- Bendroji tiesės lygtis (tiesės lygtis):
 $ax + by + c = 0$, čia $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x, y sistemos standartinis pavidalas:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Lygties $f(x) \cdot g(x) = 0$ ($f(x), g(x)$ – pirmojo ir (ar) antrojo laipsnio daugianariai) sprendimas:
 $f(x) \cdot g(x) = 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
- Trupmeninės racionaliosios lygties $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ($f(x), g(x)$ – pirmojo ir (ar) antrojo laipsnio daugianariai) sprendimas:
 $\frac{f(x)}{g(x)} = 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
- Iracionaliosios lygties $\sqrt{f(x)} = a$ ($a \geq 0, f(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianaris) sprendimas:
 $\sqrt{f(x)} = a, \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
- Iracionaliosios lygties $\sqrt[3]{f(x)} = a$ ($f(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianaris) sprendimas:
 $\sqrt[3]{f(x)} = a, \Rightarrow f(x) = a^3$
- Rodiklinės lygties $a^{f(x)} = a^b$ ($a > 0, a \neq 1, f(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianaris) sprendimas:
 $a^{f(x)} = a^b, \Rightarrow f(x) = b$
- Rodiklinės lygties $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1, f(x), g(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianariai) sprendimas:
 $a^{f(x)} = a^{g(x)}, \Rightarrow f(x) = g(x)$
- Logaritminės lygties $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$ ($a > 0, a \neq 1, f(x), g(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianariai) sprendimas:
 $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- Logaritminės lygties $\log_a(f(x)) = b$ ($a > 0, a \neq 1, f(x)$ – pirmojo ar antrojo laipsnio daugianaris) sprendimas:
 $\log_a(f(x)) = b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$
- Sudėtinių procentų formulė:

$$S_n = S_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

- Programoje paminėti ir trupmenines racionaliąsias lygtis
- [...] grafiškai dažniausiai gaunamos sprendinių apytikslės reikšmės. – vietoje gaunami apytiksliai sprendiniai
- Iracionaliųjų lygčių pastraipoje įterpti b : „[...] skaičiai $a, b \neq 0$ “[...]
- Logaritminių lygčių pastraipoje geriau rašyti $\log_a(f(x)) = b$, o ne $\log_a(f(x)) + b = 0$

2.4 tema „Nelygybės“

^ Nelygybės.

Racionaliosios nelygybės. Nagrinėjant kvadratinės nelygybes, atskleidžiama intervalų metodo esmė. Paaiškinama, kad intervalų metodą patogu taikyti, sprendžiant ir kitas nelygybes.

Apibrėžiama racionaliosios nelygybės sąvoka.

Mokoma(si) spręsti paprastas trupmenines racionaliąsias nelygybes intervalų metodu.

Praktikuojamasi spręsti paprastas nelygybių sistemas (su vienu nežinomuoju), kurių viena nelygybė yra tiesinė, o kita – kvadratinė arba trupmeninė racionalioji.

Rodiklinės nelygybės. Apibrėžiamos rodiklinės nelygybės.

Mokoma(si) spręsti rodiklines nelygybes, kurių bendri pavidalai yra

$$a^{f(x)} \geq a^r \ (r \in \mathbb{Z}), \quad a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

(($f(x)$ ir $g(x)$ – ne aukštesnio negu pirmojo laipsnio vienanariai, dvinariai).

Logaritminės nelygybės. Apibrėžiamos logaritminės nelygybės.

Mokomasi spręsti logaritmines nelygybes, kurių bendri pavidalai yra

$$\log_a(x) \geq b, \quad \log_a(f(x)) \geq \log_a(g(x))$$

(($f(x), g(x)$ – ne aukštesnio negu pirmojo laipsnio vienanariai, dvinariai).

Analizuojama, kada ir kodėl būtina atsižvelgti į logaritmo apibrėžimo sritį.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Nelygybė su vienu nežinomuoju
- Racionalioji nelygybė
- Kvadratinė nelygybė
- Trupmeninė racionalioji nelygybė
- Intervalų metodas
- Rodiklinė nelygybė
- Logaritminė nelygybė
- Nelygybių su vienu nežinomuoju sistemos

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- Nelygybės su vienu nežinomuoju x standartinis pavidalas: $f(x) \lessgtr 0$
- Kvadratinės nelygybės standartinis pavidalas: $ax^2 + bx + c \lessgtr 0$, čia $a \neq 0$, x – nelygybės nežinomasis
- Trupmeninės racionaliosios nelygybės su vienu nežinomuoju x standartinis pavidalas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \lessgtr 0$$
- Dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju x sistemos standartinis pavidalas:

$$\begin{cases} f(x) \lessgtr 0 \\ g(x) \lessgtr 0 \end{cases}$$

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Trupmeninės racionaliosios nelygybės $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ sprendimas, keičiant ją nelygybių sistemų visuma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

- Rodiklinės nelygybės $a^{f(x)} \geq a^b$ ($a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{Q}$) sprendimas:

$$a^{f(x)} > a^b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > b, \text{ kai } a > 1 \\ f(x) < b, \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases} \quad a^{f(x)} \geq a^b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq b, \text{ kai } a > 1 \\ f(x) \leq b, \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{f(x)} < a^b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < b, \text{ kai } a > 1 \\ f(x) > b, \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases} \quad a^{f(x)} \leq a^b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq b, \text{ kai } a > 1 \\ f(x) \geq b, \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Rodiklinės nelygybės $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) sprendimas:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \text{ kai } a > 1 \\ f(x) < g(x), \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases} \quad a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \text{ kai } a > 1 \\ f(x) \leq g(x), \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \text{ kai } a > 1 \\ f(x) > g(x), \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases} \quad a^{f(x)} \leq a^{g(x)},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \text{ kai } a > 1 \\ f(x) \geq g(x), \text{ kai } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Logaritminės nelygybės $\log_a(f(x)) \geq \log_a(g(x))$ ($a > 0, a \neq 1$) sprendimas:

$$- \log_a(f(x)) > \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$$

$$- \log_a(f(x)) > \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$$

$$- \log_a(f(x)) \geq \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$$

$$- \log_a(f(x)) \geq \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$$

$$- \log_a(f(x)) < \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$$

$$- \log_a(f(x)) < \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$$

- $\log_a(f(x)) \leq \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$
- $\log_a(f(x)) \leq \log_a(g(x)), \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$
- Logaritminės nelygybės $\log_a(f(x)) \gtrless b$ ($a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{Q}$) sprendimas:
 - $\log_a(f(x)) > b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$
 - $\log_a(f(x)) > b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$
 - $\log_a(f(x)) \geq b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$
 - $\log_a(f(x)) \geq b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$
 - $\log_a(f(x)) < b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$
 - $\log_a(f(x)) < b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) > a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$
 - $\log_a(f(x)) \leq b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } a > 1$
 - $\log_a(f(x)) \leq b, \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}, \text{ kai } 0 < a < 1$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

IV gimnazijos klasė, B kursas

2 sritis „Modeliai ir sąryšiai“

2.1 tema „Trigonometrinės lygtys“

^ Trigonometrinės lygtys.

Mokomasi tapačiai pertvarkyti skaitinius ir raidinius reiškinius, taikant formules:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)},$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha), \quad 1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)},$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos(\alpha), \quad \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nagrinėjami situacijų, kai sudaromos ir sprendžiamos trigonometrinės lygtys, pavyzdžiai.

Aptariama, kada patogų trigonometrines lygtis spręsti algebriniu būdu.

Pateikiamos ir aptariamos lygčių

$$\sin(x) = a \quad (a \in [-1; 1]), \quad \cos(x) = a \quad (a \in [-1; 1]), \quad \operatorname{tg}(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

sprendinių formulės.

Mokoma(si) spręsti

$$a \cdot f(x) + b = 0; \text{ čia } f(x) = \sin(x), \cos(x), \operatorname{tg}(x); \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

pavidalo lygtis.

Praktikuojamasi rasti trigonometrinės lygties sprendinius nurodytame intervale.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Trigonometrinės formulės:
 - to paties didumo kampo sinusą ir kosinusą siejanti formulė
 - to paties didumo kampo sinusą, kosinusą ir tangentą siejanti formulė
 - to paties didumo kampo tangentą ir kosinusą siejanti formulė
 - neigiamo didumo kampo sinuso, kosinuso ir tangento formulės
 - su sinuso, kosinuso ir tangento periodiškumu susijusios formulės
- Trigonometriniai reiškiniai; trigonometrinio reiškinio pertvarkymas (tapatusis pertvarkymas), prastinimas
- Trigonometrinės lygtys; trigonometrinės lygties sprendinys ir sprendinių aibė; trigonometrinės lygties sprendimas
- Trigonometrinių lygčių sprendinių formulės

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha)$ ($\tan(\alpha)$) – kampo, kurio didumas lygus α , sinusas, kosinusas ir tangentas
- $\arcsin(a)$, $\arccos(a)$, $\operatorname{arctg}(a)$ ($\arctan(a)$) – skaičiaus a arkssinusas, arkkosinusas ir arktangentas

- $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $\operatorname{tg}(x) = a$ ($\tan(x) = a$) – paprasčiausių trigonometrinių lygčių standartinis pavidalas, čia x – lygties nežinomas, a – realusis skaičius

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Paprasčiausių trigonometrinių lygčių sprendinių formulės:
 - $\sin(x) = a$; kai $a \in [-1; 1]$, tai $x = (-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$
 - $\cos(x) = a$; kai $a \in [-1; 1]$, tai $x = \pm \arccos(a) + 2\pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$
 - $\operatorname{tg}(x) = a$; $x = \operatorname{arctg}(a) + \pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

Rekomendacijos.

1. *Samprata.* Buvo pateikta III gimnazijos klasėje: vienetinis apskritimas, tangentų tiesė, posūkio kampas.
2. *Formulės.* Visos formulės surašytos programoje, bet reikėtų iš pagrindinės mokyklos priminti formules $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, aptarti VBE formulių rinkinyje esančias formules.
3. *Lygčių sprendimas.* Pateikiamos formulės (jos pagrindžiamos, aptariamoms). Mokoma(si), naudojantis sprendinių formulėmis, užrašyti lygties sprendinius ir atrinkti sprendinius, kurie patenka į nurodytą intervalą. Nepamiršti grafinio sprendimo būdo.

VBE II B 2025 m. uždaviniai

6 uždavinys

6. Naudodamiesi formule $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ apskaičiuokite $\operatorname{tg}^2 \alpha$, kai $\cos \alpha = -\frac{1}{7}$.

Atsakymas. $\operatorname{tg}^2 \alpha = 48$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	20,2	55,1	0,600
79,8	20,2			

Bandomosios užduoties panašus uždavinys.

9. Apskaičiuokite $\cos^2 \alpha$, kai $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

16 uždavinys

16. Duota funkcija $f(x) = 1 - \sin^2 x - 2 \cos x - \cos(-x) \cdot \cos x$.

16.1 uždavinys

16.1. Parodykite, kad $f(x) = -2 \cos x$.

(2 taškai)

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	22,6	64,8	0,722
71,9	10,9	17,2			

16.2 uždavinys

16.2. Žinodami, kad $f(x) = -2 \cos x$, išspręskite lygtį $f(x) = -1$. Nurodykite jos sprendinius, kai $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(3 taškai)

Atsakymas. $x = 60^\circ$, $x = 300^\circ$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)				Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	3	12,9	41,6	0,665
80,5	7,2	5,4	6,9			

2.2 tema „Funkcijos išvestinės“

^ Funkcijos išvestinė.

Funkcijos išvestinės samprata. Aiškinama(si), ką vadiname funkcijos argumento pokyčiu ir funkcijos reikšmės pokyčiu. Šių pokyčių santykis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ susiejamas su tiesės $y = kx + b$ krypties koeficientu k ir paaiškinama, kaip su juo susijęs funkcijos reikšmių kitimas.

Apibrėžiama tolydžios funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinė, einančios per nurodytą grafiko tašką, sąvoka, paaiškinama, kaip per grafiko tašką $(a; f(a))$ einanti liestinė apibūdina funkcijos reikšmių kitimą pereinant šį tašką (geometrinė išvestinės prasmė).

Pateikiamas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės taške, kurio $x = a$, ryšys su tame taške nubrėžtos funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientu ($k = f'(a)$).

Formuluojamas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės taške $x = a$ apibrėžimas, išvestinės funkcijos $y = f'(x)$ apibrėžimas.

Naudojantis funkcijos išvestinės apibrėžimu, mokomasi rasti pastoviosios, tiesinės ir kvadratinės funkcijų išvestines.

Be įrodymo pateikiama laipsninės funkcijos $y = f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) išvestinės radimo taisyklė ir taisyklės, kuriomis naudojantis galima apskaičiuoti išvestines:

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x),$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$((f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Mokoma(si) apskaičiuoti funkcijos išvestinės reikšmę duotame taške, spręsti lygtį $f'(x) = a$.

Nagrinėjant konkrečius pavyzdžius, aptariama fizikinė išvestinės prasmė.

Funkcijos savybių tyrimas, naudojantis išvestine. Apibrėžiamos sąvokos: funkcijos kritiniai, ekstremumo (minimumo ir maksimumo) taškai, ekstremumai.

Išsiaiškinama, kodėl ir kaip, naudojantis išvestine, galima surasti funkcijos apibrėžimo srities intervalus, kuriuose funkcija yra didėjančioji, mažėjančioji, pastovioji, funkcijos ekstremumus, didžiausią ir mažiausią reikšmę uždaramame intervale.

Tiriamos funkcijų, išreiškiamų ne aukštesnio negu trečiojo laipsnio daugianariu, savybės, braižomi jų grafikų eskizai.

Praktikuojamasi taikyti išvestines, sprendžiant optimizavimo uždavinius.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Funkcija, funkcijos formulė, funkcijos reiškiny
- Tolydžioji funkcija
- Funkcijos nepriklausomojo kintamojo (funkcijos argumento) ir priklausomojo kintamojo (funkcijos reikšmės) atitinkami pokyčiai ir jų santykis
- Funkcijos grafiko liestinė
- Funkcijos išvestinė funkcijos apibrėžimo srities taške
- Funkcijos išvestinė funkcija

- Funkcijos grafiko liestinė ir jos lygtis
- Funkcijos išvestinės fizikinė prasmė
- Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės:
 - skaičiaus ir funkcijos reiškinių sandaugos išvestinė
 - funkcijų reiškinių sumos ir skirtumo išvestinė
 - funkcijų reiškinių sandaugos išvestinė
 - funkcijų reiškinių dalmens išvestinė
- Funkcijos ir funkcijos grafiko savybių tyrimas
- Funkcijos kritinis taškas ir funkcijos reikšmė kritiniame taške; funkcijos grafiko kritinis taškas
- Funkcijos ekstremumo taškas ir funkcijos ekstremumas (funkcijos reikšmė kritiniame taške); funkcijos grafiko ekstremumo taškas
- Funkcijos minimumo (maksimumo) taškas ir funkcijos minimumas (maksimumas); funkcijos grafiko minimumo (maksimumo) taškas
- Funkcijos mažiausioji (didžiausioji) reikšmė
- Funkcijos nepriklausomojo kintamojo (argumento) reikšmių intervalai, kuriuose funkcija yra mažėjančioji (didėjančioji, pastovioji)
- Optimizavimo uždaviniai

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- $y = f(x)$ – funkcijos, kurios nepriklausomasis kintamasis (argumentas) x , o priklausomasis kintamasis (funkcijos reikšmės) y , formulė; $f(x)$ – funkcijos reiškinys
- $f'(x)$, $(f(x))'$ – funkcijos $y = f(x)$ reiškinio išvestinė
- $y = f'(x)$, $y = (f(x))'$ – funkcijos $y = f(x)$ išvestinė funkcija
- $\min$ – minimumo žymuo, $\max$ – maksimumo žymuo
- $\min_{x \in [a; b]} f(x)$, $\min_{a \leq x \leq b} f(x)$, $\min_{[a; b]} f(x)$ – funkcijos $y = f(x)$ mažiausioji reikšmė, kai $x \in [a; b]$
- $\max_{x \in [a; b]} f(x)$, $\max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $\max_{[a; b]} f(x)$ – funkcijos $y = f(x)$ didžiausioji reikšmė, kai $x \in [a; b]$
- $\min f(x)$ – funkcijos $y = f(x)$ mažiausioji reikšmė ($x \in D_f$)
- $\max f(x)$ – funkcijos $y = f(x)$ didžiausioji reikšmė ($x \in D_f$)

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- Funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$ išvestinių skaičiavimo taisyklės (išvestinių savybės):
 - $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$
 - $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
 - $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- Funkcijų (funkcijų reiškinių) išvestinės:
 - $(\text{const})' = 0$
 - $(kx + b)' = k$
 - $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$
 - $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$
 - $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

Rekomendacijos.

1. *Samprata.* Aiškinant funkcijos išvestinės sampratą, reikia funkcijos išvestinę sieti su funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientu.

2. *Išvestinės apibrėžimo taikymas.* Naudojantis išvestinės apibrėžimu, mokyti rasti $y = f(x) = a; kx + b; ax^2 + bx + c$ išvestines nurodant funkcijos apibrėžimo srities taške $x = a$ ir funkcijos išvestinę $y = f'(x)$.

3. *Išvestinių skaičiavimo taisyklės.* Be įrodymo pateikiamos programoje surašytos išvestinių skaičiavimo taisyklės bei laipsnio išvestinės formulė.

4. *Išvestinės fizikinė prasmė.* Nuvažiuoto kelio priklausomybės nuo važiavimo laiko, kai važiuojama pastoviu greičiu, išvestinė lygi važiavimo greičiui: $s'(t) = (vt)' = v$, pavyzdžiui: $s'(t) = (5t)' = 5$, $s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$.

5. *Naujos sąvokos:*

- funkcijos kritinis taškas ir funkcijos reikšmė kritiniame taške;
- funkcijos ekstremumo taškas ir funkcijos ekstremumas (funkcijos reikšmė ekstremumo taške);
- funkcijos minimumo taškas ir funkcijos minimumas (funkcijos reikšmė minimumo taške);
- funkcijos maksimumo taškas ir funkcijos maksimumas (funkcijos reikšmė maksimumo taške).

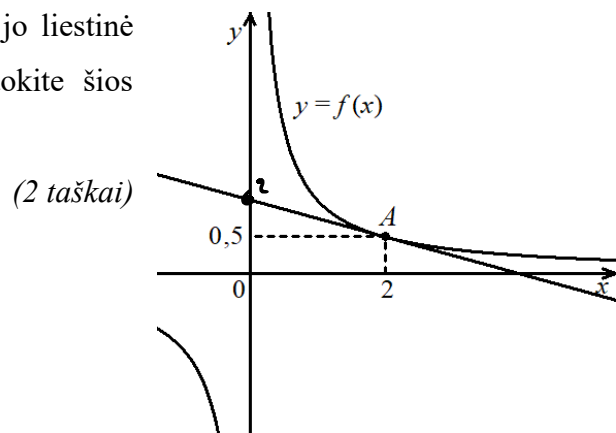
6. *Uždaviniai.*

- Funkcijos savybių tyrimas, naudojantis išvestine – funkcijos apibrėžimo srities intervalų, kuriuose funkcija yra didėjančioji, mažėjančioji radimas.
- Funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmių radimas nurodant uždaramą apibrėžimo srities intervalą.
- Funkcijos savybių nustatymas, naudojantis pateiktu funkcijos išvestinės grafiku.
- Dviejų realiųjų skaičių suma lygi a . Kam lygi didžiausia tokių dviejų skaičių sandauga.
- Stačiakampio perimetras lygus P . Kokie yra tokio stačiakampio, kurio plotas yra didžiausias, matmenys?
- Funkcijos grafiko eskizo braižymas, kai funkcijos reiškinys yra trečiojo laipsnio daugianaris $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

VBE II B 2025 m. uždaviniai

19 uždavinys

19. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = x^{-1}$ grafikas ir jo liestinė taške A. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite šios liestinės krypties koeficientą.



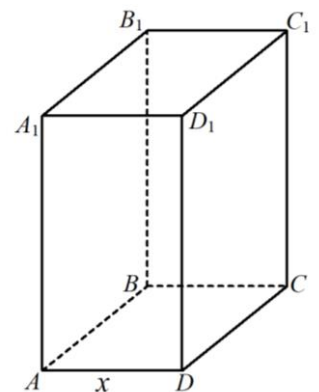
Atsakymas. $-\frac{1}{4}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	5,8	19,7	0,515
91,9	4,6	3,4			

15 uždavinys

15. Projektuojama stačiakampio gretasienio formos dėžutė (žr. pav.). Yra žinoma, kad briaunų AB , AD ir AA_1 ilgių suma lygi 36 cm, o briauna AB du kartus ilgesnė už briauną AD .



15.1 uždavinys

15.1. Stačiakampio gretasienio pagrindo $ABCD$ trumpesniosios kraštinės AD ilgį pažymėkime x cm (čia $0 < x < 12$). Parodykite, kad dėžutės tūrį (cm^3) galima apskaičiuoti pagal formulę

$$V(x) = 72x^2 - 6x^3.$$

(2 taškai)

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	4,2	15,2	0,494
95,2	1,1	3,7			

15.2 uždavinys

15.2. Apskaičiuokite $V'(x)$.

(1 taškas)

Atsakymas. $V'(x) = 144x - 18x^2$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	38,4	83,5	0,676
61,6	38,4			

Bandomosios užduoties panašus uždavinys.

16. Duota funkcija $f(x) = 2x^2(x + 3)$.

16.2. Parodykite, kad $f'(x) = 6x^2 + 12x$.

15.3 uždavinys

15.3. Parodykite, kad dėžutės tūris yra didžiausias, kai $x = 8$ (cm).

(2 taškai)

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	11,2	36,4	0,639
84,5	8,7	6,8			

15.4 uždavinys

15.4. Apskaičiuokite didžiausią galimą dėžutės tūrį.

(1 taškas)

Atsakymas. 1536 cm^3 .

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	39,0	74,0	0,581
61,0	39,0			

3 sritis „Geometrija ir matavimai“

3.1 tema „Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje“

^ Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.

Susipažįstama su stereometrijos aksiomomis:

per bet kuriuos du taškus eina vienintelė tiesė; per bet kuriuos tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma; jei du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ir tiesė priklauso plokštumai; jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi ir bendrą tiesę, kurioje yra visi bendrieji tų plokštumų taškai.

Aptariamoms teorems:

per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma; per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma; per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Mokomasi taikyti šias teoremas.

Tyrinėjama ir apibrėžiama, kokios gali būti tiesės ir plokštumos, dviejų plokštumų tarpusavio padėtys.

Nagrinėjami atstumai ir kampai erdvėje:

atstumas tarp dviejų taškų, tarp taško ir tiesės, taško ir plokštumos, dviejų lygiagrečių tiesių, tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos, dviejų lygiagrečių plokštumų; kampai tarp susikertančių ir tarp prasilenkiančių tiesių, tarp tiesės ir plokštumos.

Apibrėžiamas dvisienis kampas, mokomasi jį rasti ar pavaizduoti brėžinyje, modelyje.

Apibrėžiama, kokia tiesė vadinama statmeniu plokštumai, įrodomas tiesės ir plokštumos statmenumo požymis.

Apibrėžiama pasviroji plokštumai ir jos statmenoji projekcija plokštumoje.

Įrodomas tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis.

Mokoma(si) šias žinias taikyti, nagrinėjant paprasčiausias realias situacijas, sprendžiant paprasčiausius uždavinius.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Stereometrijos aksiomos
- Dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtys:
 - sutampančios
 - susikertančios
 - lygiagrečios
 - prasilenkiančios
- Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys:
 - tiesė priklauso plokštumai (tiesė yra plokštumoje)
 - tiesė lygiagreti su plokštuma
 - tiesė kerta plokštumą (pasviroji plokštumai, statmuo plokštumai)
- Dviejų plokštumų tarpusavio padėtys:
 - sutampančios
 - susikertančios
 - lygiagrečios

- Atstumai:
 - tarp dviejų taškų
 - tarp taško ir tiesės
 - tarp taško ir plokštumos
 - tarp dviejų tiesių (lygiagrečių, prasilenkiančių)
 - tarp dviejų lygiagrečių plokštumų
- Kampai:
 - tarp prasilenkiančių tiesių
 - tarp tiesės ir plokštumos
 - tarp susikertančių plokštumų (dvisienis kampas)
- Pasvirosios statmenoji projekcija plokštumoje
- Stereometrijos pagrindinės teoremos:
 - per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma
 - per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma
 - per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma
 - tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis (su įrodymu)

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – plokštumos dažniausiai žymimos graikiškomis raidėmis (arba trimis didžiosiomis raidėmis)
- $\in$ – priklauso
- $\cap$ – kerta
- $\parallel$ – lygiagretu
- $\perp$ – statmena
- $A \in b$ – taškas A yra tiesėje b
- $b \in \alpha$ – tiesė b yra plokštumoje α
- $a \cap b = C$ – tiesės a ir b kertasi taške C
- $a \cap \beta = C$ – tiesė a kerta plokštumą β taške C
- $\beta \cap \gamma = AB$ – plokštumų β ir γ susikirtimo tiesė yra AB
- $\angle(a, b), (\widehat{a, b})$ – kampas tarp tiesių a ir b
- $\angle(\alpha, \beta), (\widehat{\alpha, \beta})$ – kampas tarp plokštumų α ir β
- $\angle(b, ABC), (\widehat{b, ABC})$ – kampas tarp tiesės b ir plokštumos ABC

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

Rekomendacijos.

Patarimas. Nagrinėjant grynąją stereometriją pravartu remtis stačiakampio gretasienio modeliu (pvz., klasės kabinetu).

1. Paaiškinama, kas yra aksiomos, kam jos reikalingos. Patartina pasakyti, kad yra ne tik pirminiai teiginiai (aksiomos), bet ir pirminės sąvokos (stereometrijoje – taškas, tiesė, plokštuma).
2. Pateikiamos programoje surašytos aksiomos. Patartina pateikti ir planimetrijos aksiomas.

3. Aptariamoms ir panagrinėjamos programoje surašytos teoremos.

4. Nagrinėjamos dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtys.

5. Nagrinėjama tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys.

6. Nagrinėjamos dviejų plokštumų tarpusavio padėtys.

7. Mokomasi rasti atstumą:

- tarp dviejų erdvės taškų, nuo taško iki tiesės; nuo taško iki plokštumos;
- tarp dviejų lygiagrečių tiesių; tarp dviejų prasilenkiančių tiesių; nuo tiesės iki jai lygiagrečios plokštumos;
- tarp dviejų lygiagrečių plokštumų.

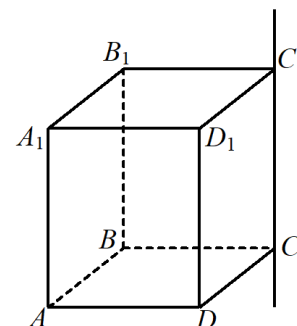
8. Mokomasi rasti kampą:

- tarp tiesės ir plokštumos;
- tarp dviejų susikertančių plokštumų;
- tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.

VBE II B 2025 uždaviniai

9 uždavinys

9. Nurodykite stačiakampio gretasienio $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kurią nors **vieną** briauną, esančią tiesėje, prasilenkiančioje su tiese CC_1 .



Atsakymas. AB .

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	15,2	33,7	0,399
84,8	15,2			

3.2 tema „Briaunainiai, sukiniai“

^ Briaunainiai, sukiniai.

Apibrėžiamos sąvokos: sukinys, briaunainis.

Mokomasi atpažinti erdvės figūras: stačiasias prizmes, piramides, ritinius, kūgius ir rutulius.

Išsiaiškinama, kaip brėžinyje tinkamai pavaizduoti taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižinį pjūvį, taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinį pjūvį, ritinio ir kūgio ašinius pjūvius.

Sprendžiami su erdvės figūrų pjūvio plotu, paviršiaus plotu ir tūriu susiję uždaviniai.

Susipažįstama su taisyklingųjų briaunainių, sukinų pasireiškimo gamtoje ir žmogaus veikloje pavyzdžiais.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Erdvinių kūnų (erdvės figūrų) rūšys: briaunainiai, sukiniai
- Briaunainių rūšys: prizmės, piramidės
- Sukinių rūšys: ritiniai, kūgiai, rutuliai (sferos)
- Prizmių rūšys: pasvirosios prizmės, stačiosios prizmės
- Stačiųjų prizmių rūšys: taisyklingosios, netaisyklingosios
- Piramidžių rūšys: taisyklingosios piramidės, netaisyklingosios piramidės
- Gretasienių rūšys: statieji gretasieniai, stačiakampiai gretasieniai, kubai
- Taisyklingieji briaunainiai: tetraedrai, kubai
- Erdvinio kūno paviršiaus plotas:
 - stačiosios prizmės, piramidės, kūgio, ritinio šoninio paviršiaus plotas; pagrindo (pagrindo) plotas; viso paviršiaus plotas
 - rutulio paviršiaus plotas
- Erdvinių kūnų tūriai
- Erdvinių kūnų pjūviai:
 - taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižinis pjūvis
 - taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinis pjūvis
 - ritinio ašinis pjūvis
 - kūgio ašinis pjūvis
- Kūgio, ritinio sudaromoji
- Prizmės piramidės, kūgio, ritinio aukštinė

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

Rekomendacijos.

1. *Mokiniai turi žinoti, bet jau bus primiršę.*

Su programoje nurodytomis erdvės figūromis mokiniai susipažino 8 klasėje:

Erdvės figūros (20 pamokų)

- Stačioji prizmė (4 pamokos)
- Taisyklingoji piramidė (4 pamokos)
- Ritinis (4 pamokos)
- Kūgis (4 pamokos)
- Sfera ir rutulys (4 pamokos)

Sunku tikėtis, kad mokiniai jų bus neprimiršę, todėl rekomenduotina viską pradėti nuo pradžios, kaip nurodyta programoje, apibrėžiant sukinius ir briauninius.

2. *Pjūviai:*

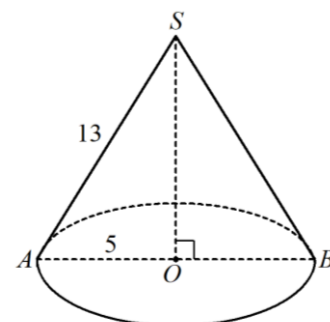
- Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižinis pjūvis – stačiakampis, gautas prizmę kertant plokštuma, einančia per prizmės priešingas briaunas.
- Taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinis pjūvis – trikampis, gautas piramidę kertant plokštuma, einančia per piramidės viršūnę ir dvi priešingas pagrindo viršūnes.
- Ritinio ašinis pjūvis – stačiakampis, gautas ritinį kertant plokštuma, einančia per ritinio aukštinę.
- Kūgio ašinis pjūvis – lygiašonis trikampis, gautas kūgį kertant plokštuma, einančia per kūgio aukštinę.

3. *Uždaviniai.*

Tradicioniai: skaičiuojame šoninio paviršiaus, viso paviršiaus plotus; programoje surašytų figūros pjūvių plotus; figūros ir jos dalių tūrius; figūros briaunų, įstrižainių, aukštinės ir pan. ilgius; įvairių kampų didumus; įvairius atstumus.

VBE II B 2025 m. uždaviniai**14 uždavinys**

14. Paveiksle pavaizduotas kūgis, kurio sudaromosios SA ilgis lygus 13, o pagrindo spindulio OA ilgis lygus 5.



14.1 uždavinys

14.1. Apskaičiuokite šio kūgio šoninio paviršiaus plotą. Atsakymą pateikite su π .

(1 taškas)

Atsakymas. 65π .

Statistinė informacija.

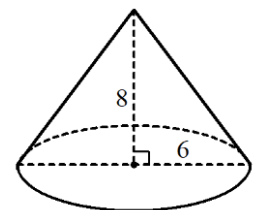
Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	62,9	71,6	0,514
37,1	62,9			

Bandomosios užduoties panašus uždavinys.

14. Paveiksle pavaizduoto kūgio pagrindo spindulio ilgis lygus 6, o kūgio aukštinės ilgis lygus 8.

14.1. Apskaičiuokite kūgio šoninio paviršiaus plotą.

(2 taškai)

**14.2 uždavinys**

14.2. Parodykite, kad atstumas nuo kūgio viršūnės S iki kūgio pagrindo plokštumos lygus 12.

(1 taškas)

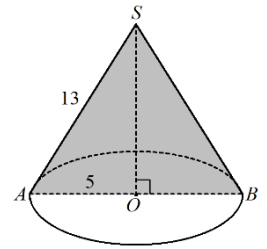
Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	47,7	87,2	0,660
52,3	47,7			

14.3 uždavinys

14.3. Žinodami, kad $SO = 12$, apskaičiuokite šio kūgio ašinio pjūvio ASB plotą.

(1 taškas)



Atsakymas. 60.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	22,0	53,6	0,565
78,0	22,0			

14.4 uždavinys

14.4. Apskaičiuokite rutulio, kurio tūris lygus šio kūgio tūriui, spindulio ilgį.

(3 taškai)

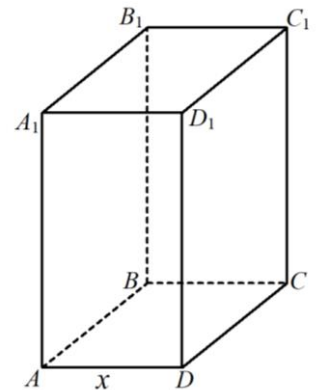
Atsakymas. $\sqrt[3]{75}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)				Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	3	24,0	61,3	0,760
60,0	18,3	11,4	10,2			

15 uždavinys

15. Projektuojama stačiakampio gretasienio formos dėžutė (žr. pav.). Yra žinoma, kad briaunų AB , AD ir AA_1 ilgių suma lygi 36 cm, o briauna AB du kartus ilgesnė už briauną AD .

**15.1 uždavinys**

- 15.1. Stačiakampio gretasienio pagrindo $ABCD$ trumpesniosios kraštinės AD ilgį pažymėkime x cm (čia $0 < x < 12$). Parodykite, kad dėžutės tūrį (cm^3) galima apskaičiuoti pagal formulę

$$V(x) = 72x^2 - 6x^3.$$

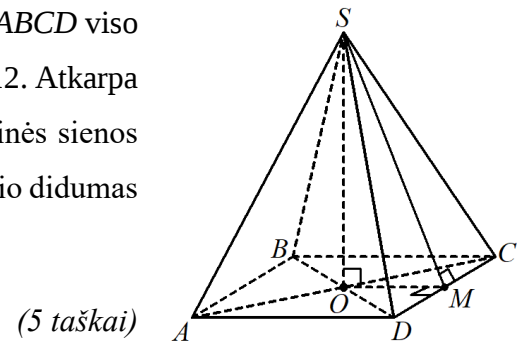
(2 taškai)

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	4,2	15,2	0,494
95,2	1,1	3,7			

20 uždavinys

20. Paveiksle pavaizduotos taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ viso paviršiaus plotas lygus 384, o pagrindo kraštinės AD ilgis lygus 12. Atkarpa SM yra piramidės šoninės sienos SCD aukštinė. Piramidės šoninės sienos SCD plokštuma ir pagrindo $ABCD$ plokštuma sudaro kampą, kurio didumas lygus α . Apskaičiuokite $\sin \alpha$.



Atsakymas. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)						Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	3	4	5	7,2	24,4	0,622
85,8	5,1	2,7	2,4	1,9	2,2			

4 sritis „Duomenys ir tikimybės“

4.1 tema „Įvadas į statistinę duomenų analizę“

^ Įvadas į statistinę duomenų analizę.

Susipažįstama su statistinės duomenų analizės procesais, kurių metu nustatomas statistinio tyrimo klausimas, renkami, tvarkomi, analizuojami atitinkami duomenys, interpretuojami analizės rezultatai bei daromos išvados. Akcentuojama, kad duomenų analizė yra plačiai taikoma įvairiose srityse, pavyzdžiui, verslo, sveikatos priežiūros, finansų, bei moksliniuose tyrimuose.

Paaiškinama, kad funkcijos gali būti naudojamos duomenims apibūdinti, o jei duomenys susiję tiesiniu ryšiu, tai tas ryšys gali būti modeliuojamas tiese ir šio ryšio stiprumas ir kryptis išreikšti koreliacijos koeficientu. Išsiaiškinama, kad svarbi šio modelio (tiesės) charakteristika – determinacijos koeficientas (R kvadratas). Mokomasi, jį žinant (suradus), priimti sprendimą dėl gauto modelio tinkamumo duomenims aprašyti.

Mokiniai išsiaiškina, kad statistinės analizės tikslas – ištyrus dalį respondentų (imtį), padaryti pagrįstą išvadą apie visą populiaciją.

Aptariami kintamojo, kintamojo matavimo skalių bei duomenų tipai.

Mokoma(si) praktiškai, naudojant skaitmenines technologijas, apskaičiuoti duomenų rinkinio vidurkį, standartinį nuokrypį, interpretuoti, kaip jie charakterizuoja imtį.

Nagrinėjami pavyzdžiai, kai sprendimui dėl kintamųjų ryšio ir jo stiprumo priimti naudojama koreliacija. Atkreipiamas dėmesys, kad koreliacija nepaaiškina priežastingumo. Išsiaiškinama, kaip priimamas sprendimas, kuris kintamasis vadinamas priklausomu kintamuoju, o kuris – aiškinamuoju.

Skaitmeninių technologijų pagalba mokomasi duomenis vaizduoti grafiškai (vizualizuoti).

Mokoma(si) diskutuoti apie statistinio tyrimo struktūrą, duomenų rinkimo sąlygas ir būdą, duomenų analizei taikytus metodus, duomenų santraukas ir padarytas išvadas.

Rekomendacija. [statistinio-rastingumo-ugdymas-9-12-kl-mokytojams.pdf \(emokykla.lt\)](https://emokykla.lt/statistinio-rastingumo-ugdymas-9-12-kl-mokytojams.pdf)

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: **Prašome rašyti savo nuomonę**

4.2 tema „Tikimybės ir jų interpretavimas“

^ Tikimybės ir jų interpretavimas.

Sprendžiant uždavinius, naudojamos tikimybės apibrėžimu ir tikimybių savybėmis:

būtinąjo įvykio tikimybė $P(\text{būtinąjo}) = 1$,

neįvykio tikimybė $P(\text{neįvykio}) = 0$,

vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Nagrinėjami paprasčiausi dviejų trijų etapų bandymai (stochastiniai bandymai) ir su jo etapais susiję nepriklausomi ar priklausomi įvykiai (negrąžintinio ir grąžintinio ėmimo atvejais).

Braižomi tikimybių medžiai ir analizuojami su bandymu susiję nesutaikomi įvykiai, mokomasi be formulių apskaičiuoti įvykių

„A arba B“, „A ir B“

tikimybes, atkreipiamas dėmesys į jungtukų „ir“ bei „arba“ esmę.

Aptariama, kokie bandymo (stochastinio bandymo) įvykiai vadinami elementariais, o kokie – sudėtiniais.

Mokoma(si) atpažinti ir formuluoti su bandymu susijusius sudėtinius įvykius, apskaičiuoti jų tikimybes.

Nagrinėjant pavyzdžius, aptariama, kokie įvykiai vadinami nesutaikomais, sutaikomais. Mokoma(si) tokiems įvykiams palankias baigtis pavaizduoti Veno diagramomis, galimybių medžiais, galimybių lentelėmis.

Praktikuojamasi apskaičiuoti įvykių tikimybes.

Sąvokos, terminai, išsireiškimai:

- Tikimybių teorija
- Klasikiniai tikimybiniai bandymai, jų baigtys
- Tikimybinio bandymo įvykis, elementarusis įvykis, sudėtinis įvykis
- Tikimybinio bandymo būtinasis įvykis, neįvykis
- Tikimybinio bandymo nesutaikomieji ir sutaikomieji įvykiai
- Tikimybinio bandymo nepriklausomieji ir priklausomieji įvykiai
- Tikimybinio bandymo baigties tikimybė
- Tikimybinio bandymo įvykio tikimybė

Žymenys, ženklai, simboliai, trumpiniai:

- P – tikimybė
- A – tikimybinio bandymo įvykis
- $\bar{A}$ – tikimybinio bandymo įvykis, priešingas įvykiui A
- $P(A)$ – tikimybinio bandymo įvykio A tikimybė

Formulės, taisyklės, sąryšiai:

- $P(A) = \frac{m}{n}$, n – bandymo visų galimų baigčių skaičius, m – įvykiui A palankių baigčių skaičius
- $P(A) \in [0; 1]$

- Tikimybių savybės:
 - $P(\text{būtiniojo įvykio}) = 1$, $P(\text{negalimojo įvykio}) = 0$
 - $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
 - $P(A \text{ arba } B) = P(A) + P(B)$; A, B – nesutaikomieji įvykiai
 - $P(A \text{ ir } B) = P(A) \cdot P(B)$; A, B – nepriklausomieji įvykiai

Programos taisymai, siūlymai, klausimai: Prašome rašyti savo nuomonę

Rekomendacijos.

1. Tikimybės mokiniai nagrinėjo 6 klasėje ir 10 (II gimnazijos) klasės pabaigoje, bet ta tematika neįėjo į PUPP užduotį, todėl nemaža tikimybė, kad mokiniai tikimybių nežino.

2. Įvykių nesutaikomumas.

- $P(A \text{ arba } B) = P(A) + P(B)$, kai įvykiai A ir B yra nesutaikomi (neturi vienodų baigčių);
- $P(A \text{ arba } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ir } B)$, kai įvykiai A ir B yra sutaikomi (turi vienodų baigčių).
Pavyzdys. Metamas standartinis žaidimo kauliukas. Stebima kiek akučių atvirto.

Įvykis A – „Atvirto lyginis skaičius akučių“, $A = \{2; 4; 6\}$.

Įvykis B – „Neatvirto nei 1, nei 6 akutės“, $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Įvykis $(A \text{ arba } B) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Įvykis $(A \text{ ir } B) = \{2; 4\}$.

$$P(A \text{ arba } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ir } B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

3. Įvykių nepriklausomumas.

- $P(A \text{ ir } B) = P(A) \cdot P(B)$ – įvykiai A ir B yra nepriklausomi (vieno jų įvykimas ar neįvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei).

Pavyzdys. Moneta metama tris karus. Kokia tikimybė, kad moneta visus tris kartus atvirs ta pačia puse?

Sprendimas.

1. Surašome visa galimas bandymo baigtis, pažymėdami S – „Atvirto skaičius“, H – „Atvirto herbas“:

$SSS, SSH, SHS, HSS, SHH, HSH, HHS, HHH$ – iš viso 8 baigtys.

2. Apskaičiuojame tikimybę:

- I būdas. $P(SSS \text{ arba } HHH) = P(SSS) + P(HHH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

- II būdas. $P(SSS \text{ arba } HHH) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Pastabos.

1. Iš viso bandymas turi $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ baigtis, nes kiekvienas monetos metimas turi 2 baigtis.

2. Kiekvienos baigties tikimybė

$$P(SSS) = P(SSH) = P(SHS) = P(HSS) = P(SHH) = P(HSH) = P(HHS) = P(HHH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

VBE II B 2025 m. uždaviniai**17 uždavinys**

17. Trijose dėžėse yra vienodo dydžio kamuoliukų, kurių kiekvienas yra arba geltonas, arba mėlynas, arba raudonas.

17.1. Morta iš pirmos dėžės atsitiktinai traukia vieną kamuoliuką. Įvykis G – ištrauktasis kamuoliukas bus geltonas. Yra žinoma, kad šio įvykio tikimybė $P(G) = \frac{1}{7}$.

17.1.1 uždavinys

17.1.1. Įvykiui G priešingas įvykis yra $\bar{G}$ – ištrauktasis kamuoliukas nebus geltonas. Apskaičiuokite šio įvykio tikimybę $P(\bar{G})$.

(1 taškas)

Atsakymas. $P(\bar{G}) = \frac{6}{7}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)		Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	38,5	76,3	0,617
61,5	38,5			

17.1.2 uždavinys

17.1.2. Tikimybė, kad ištrauktasis kamuoliukas bus mėlynas, yra du kartus didesnė, negu tikimybė, kad jis bus raudonas. Apskaičiuokite tikimybę, kad šis iš pirmos dėžės ištrauktas kamuoliukas bus raudonas.

(2 taškai)

Atsakymas. $P(R \text{ iš } I) = \frac{2}{7}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	6,0	18,7	0,464
91,4	5,4	3,3			

17.1.3 uždavinys

17.1.3. Prieš Mortai traukiant kamuoliuką iš pirmos dėžės, antroje dėžėje geltonų kamuoliukų buvo 14 vienetų daugiau negu pirmoje dėžėje, o mėlynų ir raudonų kamuoliukų buvo po tiek pat, kiek ir pirmoje dėžėje. Iš antros dėžės atsitiktinai traukiant vieną kamuoliuką, tikimybė, kad jis bus geltonas, lygi $\frac{1}{3}$. Apskaičiuokite antroje dėžėje esančių mėlynų ir raudonų kamuoliukų skaičių sumą.

(4 taškai)

Atsakymas. 42.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)					Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	3	4	0,2	0,7	0,139
99,6	0,2	0,1	0,1	0,1			

17.2 uždavinys

17.2. Yra žinoma, kad trečioje dėžėje yra 5 geltoni, 2 mėlyni ir 7 raudoni kamuoliukai. Morta iš trečios dėžės atsitiktinai ištraukia vieną kamuoliuką. Negrąžinusi į dėžę šio kamuoliuko, iš tos pačios dėžės atsitiktinai ištraukia antrą kamuoliuką. Apskaičiuokite tikimybę, kad kuris nors vienas iš šių dviejų ištrauktų kamuoliukų bus geltonas, o kitas mėlynas.

(2 taškai)

Atsakymas. $\frac{10}{91}$.

Statistinė informacija.

Taškų pasiskirstymas (%)			Sunkumas	Skiriamoji geba	Koreliacija
0	1	2	3,9	12,1	0,386
93,5	5,2	1,3			

Pagrindinės mokyklos II pakopos (9–10 (I–II gimnazijos) klasių) pagrindinių temų santrauka

1. Reiškiniai, lygtys, nelygybės, sistemos (9 (I gimnazijos)–10 (II gimnazijos) klasės)

9 (I gimnazijos) klasė	10 (II gimnazijos) klasė
Raidiniai reiškiniai: - sveikieji reiškiniai: kvadratinis trinaris, jo skaidymas tiesiniais dauginamaisiais; - trupmeniniai racionalieji reiškiniai: apibrėžimo sritis, prastinimas. Kvadratinės lygtys. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio (tiesinė), o kita ne aukštesnio negu antrojo laipsnio.	Trupmeninės racionaliosios lygtys. Kvadratinės nelygybės. Lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra pirmojo laipsnio (tiesinė), o kita – tiesinė, kvadratinė arba trupmeninė racionalioji.

2. Skaičių sekos, funkcijos (9 (I gimnazijos)–10 (II gimnazijos) klasės)

9 (I gimnazijos) klasė	10 (II gimnazijos) klasė
Skaičių sekos: apibrėžtis, skaičių sekos nurodymas n-tojo nario formule, rekurentiškai. Funkcijos ir jos grafiko samprata. Tiesinės ir kvadratinės funkcijų ir jų grafikų savybės. Funkcijos grafiko transformacijos: $y = x, y = kx + b,$ $y = x^2, y = a(x - m)^2 + n.$	Kvadratinės funkcijos savybių nagrinėjimas.

3. Geometrija, trigonometrija (9 (I gimnazijos)–10 (II gimnazijos) klasės)

9 (I gimnazijos) klasė	10 (II gimnazijos) klasė
Plokštumos figūros: - apskritimo centrinis ir įbrėžtinis kampas bei jų savybės; - apskritimo liestinė, kirstinė, styga bei jų savybės; - skritulio išpjova, nuopjova. Trigonometrija: - stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso, kosinuso ir tangento apibrėžtys; - kampų, kurių didumai lygūs $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, sinuso, kosinuso ir tangento reikšmių apskaičiavimas; - to paties didumo kampą siejančios trigonometrinės formulės: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1,$ $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)};$ - stačiojo trikampio sprendimas.	Plokštumos figūros: - panašios plokštumos figūros ir jų perimetrų bei plotų ryšys; - trikampių pusiaukampinės ir jų savybės; - trikampių pusiaukraštinės ir jų savybės; - įbrėžtinio ir apibrėžtinio daugiakampio samprata; - į trikampį įbrėžto ir apie trikampį apibrėžto apskritimų centrų geometrinė vieta bei formulės $S = r \cdot p, S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R};$ - įbrėžtinis ir apibrėžtinis keturkampiai bei jų savybės. Trigonometrija: - vienetinio apskritimo ir posūkio kampo samprata; - kampų, kurių didumai $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, sinusas, kosinusas ir tangentas; - kampų, kurių didumai lygūs $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$, sinuso, kosinuso ir tangento reikšmių apskaičiavimas; - trigonometrinės formulės: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha),$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha),$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha);$ - trikampio ploto trigonometrinė formulė $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha);$ - sinusų, kosinusų teoremos; $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot R;$ - trikampių sprendimas.

4. Skaičiai ir skaičiavimai, tekstiniai uždaviniai

9 (I gimnazijos) klasė	10 (II gimnazijos) klasė
Trigonometriniai skaičiai.	Aukso pjūvio skaičius. Proporcingoji dalyba. Procentų ir dydžių santykių uždaviniai: • džiovinimo ir drėkinimo, • sudėtinių procentų, • lydinių, mišinių, tirpalų.