

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino II dalies užduotis

Išplėstinis kursas

Pagrindinė sesija

2025 m. birželio 6 d.

Trukmė – 4 val. (240 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, atsakymų lapą ir formulių rinkinį, patikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. **Atsakymų lape įrašykite savo identifikavimo kodą, grupę ir vietą (eilės numerį protokole) ir pasirašykite.**
3. Per egzaminą galite rašyti juodai arba mėlynai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
4. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei esate tikri dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape.
Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!
5. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite tik **juodai** arba **mėlynai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis. Jei savo atsakymą ir (ar) sprendimą keičiate, nubraukite jį ir aiškiai užrašykite naują.
6. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
7. **I dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
8. **II dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **II dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
9. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.
10. Pasibaigus egzaminui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.
Linkime sėkmės!

I dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (1–10) teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

1. Nustatykite p reikšmę, su kuria lygybė $x^3 \cdot \sqrt[4]{x} = x^p$ yra teisinga, kai $x > 0$.

Juodraštis

2. Panaikinkite iracionalumą trupmenos $\frac{\pi}{\sqrt{2}-1}$ vardiklyje.

Juodraštis

3. Suprastinkite reiškinių $\operatorname{tg}(\alpha + 5\pi) - \operatorname{tg}(-\alpha)$.

Juodraštis

4. Išspręskite nelygybę $\log_2 x < \log_2 5$.

Juodraštis

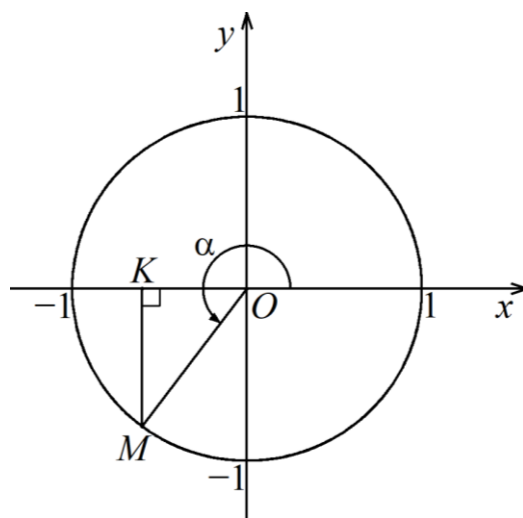
5. Duota aibė $A = \left\{5,5; \frac{3}{7}; \sqrt{5}; 0; \pi; -12\frac{1}{7}; 1, (3)\right\}$. Raskite aibę $B = A \cap I$; čia I – iracionaliųjų skaičių aibė.

Juodraštis

6. Paveiksle pavaizduoti vienetinis apskritimas¹, kurio centras yra taškas $O(0; 0)$, posūkio kampas² α ir atkarpa $MK \perp KO$. Yra žinoma, kad taškas M priklauso apskritimui, taškas K priklauso Ox ašiai, o atkarpos MK ilgis lygus $\frac{3}{4}$.

Nustatykite $\sin \alpha$ reikšmę.

Juodraštis

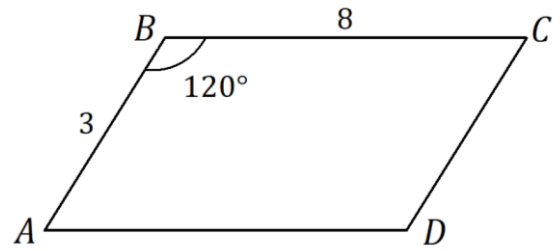


¹ vienetinis apskritimas – okrag jednostkowy – единичная окружность – одиничне коло

² posūkio kampas – kąt obrotu – угол поворота – кут повороту

7. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinių ilgiai yra lygūs 3 ir 8, o $\angle ABC = 120^\circ$ (žr. pav.). Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Juodraštis



8. Atsitiktinio dydžio X skirstinys³ pateiktas lentelė. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį EX .

m	0	1	2	3	4
$P(X = m)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{16}{125}$	$\frac{39}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{8}{125}$

Juodraštis

9. Futbolo komandoje yra 5 puolėjai ir 7 saugai. Treneris varžyboms renkasi 2 puolėjus ir 4 saugus. Nustatykite, kiek pasirinkimo galimybių turi treneris.

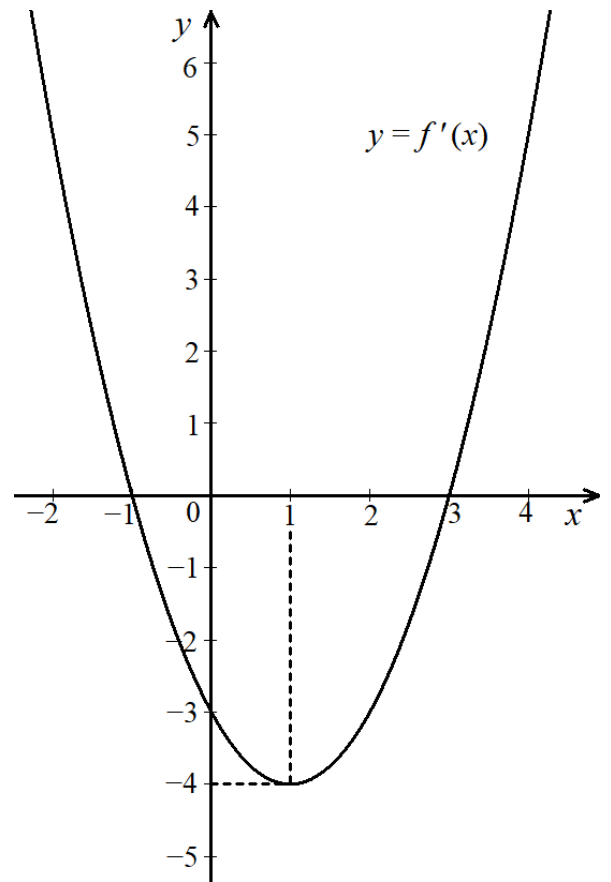
Juodraštis

³ atsitiktinio dydžio skirstinys – rozkład zmiennej losowej – распределение случайной величины – розподіл випадкової величини

10. Funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė $y = f'(x)$ yra apibrėžtos, kai $x \in \mathbb{R}$.

Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ **išvestinės** grafikas – parabolė, kurios viršūnė yra taškas $(1; -4)$. Ši parabolė kerta koordinačių ašis taškuose $(-1; 0)$, $(3; 0)$ ir $(0; -3)$. Naudodamiesi funkcijos išvestinės $y = f'(x)$ grafiku, nustatykite x reikšmių intervalą (-us), kuriame (-iuose) funkcijos $y = f(x)$ reikšmės mažėja.

Juodraštis



II dalis

Išspręskite 11–20 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

11. Aritmetinės progresijos⁴ (a_n) penktasis narys $a_5 = 6$, o jos skirtumas $d = 3$.

11.1. Apskaičiuokite $a_3 + a_9$.

(2 taškai)

Juodraštis

11.2. Apskaičiuokite progresijos (a_n) pirmųjų dešimties narių sumą S_{10} .

(2 taškai)

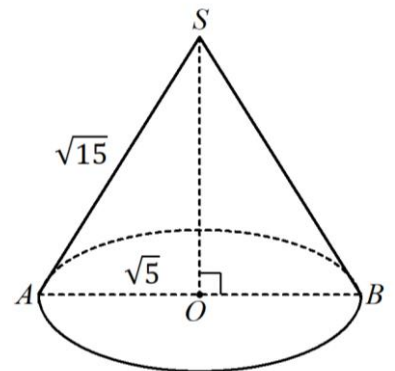
Juodraštis

12. Paveiksle pavaizduotas kūgis⁵, kurio pagrindo spindulio ilgis lygus $\sqrt{5}$, o kūgio sudaromosios ilgis lygus $\sqrt{15}$.

12.1. Apskaičiuokite šio kūgio ašinio pjūvio plotą⁶.

(2 taškai)

Juodraštis



12.2. Apskaičiuokite kampo tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos⁷ didumą laipsniais. Atsakymą pateikite suapvalintą 1° tikslumu.

(1 taškas)

Juodraštis

⁴ aritmetinė progresija – ciąg arytmetyczny – арифметическая прогрессия – арифметична прогресія

⁵ kūgis – stożek – конус – конус

⁶ ašinio pjūvio plotas – pole przekroju osiowego – площадь осевого сечения – площа осьового перерізу

⁷ pagrindo plokštuma – płaszczyzna podstawy – плоскость основания – площина основи

13. Išspręskite lygtis:

13.1. $\sqrt{2x-3} = 3-x$;

(3 taškai)

Juodraštis

13.2. $2 \sin(2x) = 5 \cos x$.

(4 taškai)

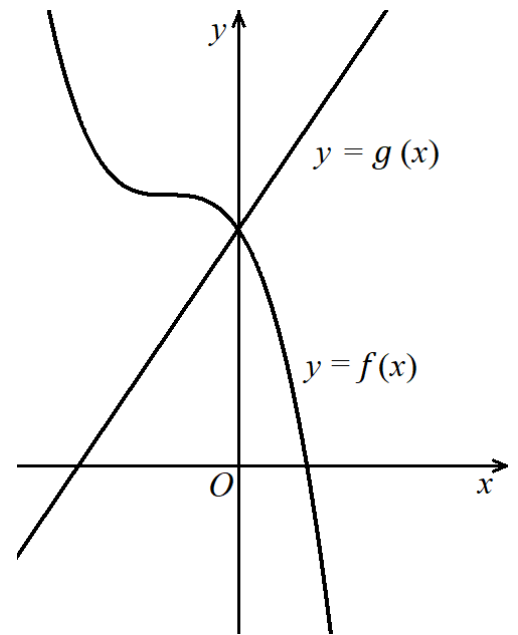
Juodraštis

14. Paveiksle pavaizduoti funkcijų $f(x) = -0,5(x + 1)^3 + 4$ ir $g(x) = 1,5x + 3,5$ grafikai.

14.1. Parodykite, kad taškas $(1; 0)$ priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui.

Juodraštis

(1 taškas)



14.2. Yra žinoma, kad funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikų susikirtimo taškas yra Oy ašyje. Nustatykite šio susikirtimo taško koordinates.

(1 taškas)

Juodraštis

14.3. Funkcijos $y = g(x)$ grafikas Ox ašį kerta taške $\left(-2\frac{1}{3}; 0\right)$. Apskaičiuokite figūros, ribojamos funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikais bei Ox ašimi, plotą.

(3 taškai)

Juodraštis

- 15.** Duoti du vektoriai $\vec{a} = (2; -k)$ ir $\vec{b} = (2 - k; 4)$. Nustatykite visas k reikšmes, su kuriomis vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs⁸.

(2 taškai)

Juodraštis

- 16.** Yra žinoma, kad $\lg 3 = a$, o $\lg 5 = b$. Skaičių $\log_2 15$ išreikškite per a ir b .

(3 taškai)

Juodraštis

⁸ kolinearūs vektoriai – wektory wspólliniowe – коллинеарные векторы – колінеарні вектори

- 17.** Atliekami trys bandymai. Kiekvieno bandymo metu naudojama dėžė, kurioje yra 16 vienodo dydžio kubelių: 5 žali, 4 raudoni ir 7 geltoni.
- 17.1.** Pirmo bandymo metu iš dėžės atsitiktinai traukiamas kubelis ir padedamas ant stalo, po to atsitiktinai traukiamas antras kubelis ir padedamas šalia pirmojo. Apskaičiuokite tikimybę, kad abu ištraukti kubeliai bus žali.

(2 taškai)

Juodraštis

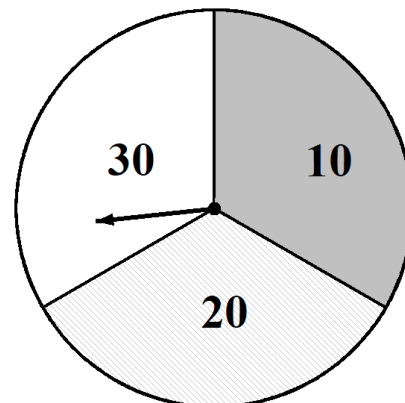
- 17.2.** Antro bandymo metu 6 kartus atliekamas toks veiksmas: iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas kubelis, užsirašoma jo spalva ir kubelis dedamas atgal į dėžę. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš 6 ištrauktų kubelių bent 3 bus raudoni.

(3 taškai)

Juodraštis

17.3. Paveiksle pavaizduotas žaidimo ratas yra padalytas į tris vienodus sektorius, o juose užrašyti skaičiai.

Trečio bandymo metu iš dėžės atsitiktinai traukiamas kubelis ir tada sukama rato rodyklė. Skaičių, kurio sektoriuje sustojo rodyklė, pažymėkime N . Jeigu iš dėžės ištrauktas **žalias** kubelis, tai bandymo rezultatas yra skaičius, lygus $2N$. Jeigu ištrauktas **raudonas** kubelis, tai bandymo rezultatas yra skaičius, lygus $\frac{N}{2}$. Jeigu ištrauktas **geltonas** kubelis, tai bandymo rezultatas yra skaičius, lygus N . Apskaičiuokite tikimybę, kad bandymo rezultatas bus skaičius 20.

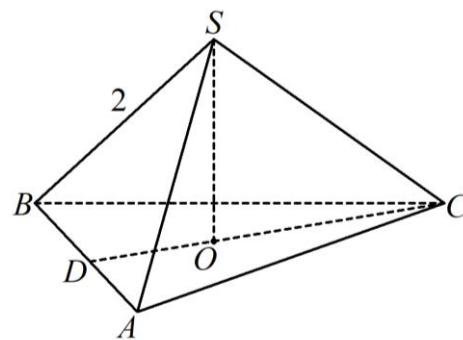


(2 taškai)

Juodraštis

18. Paveiksle pavaizduota taisoklingoji trikampė piramidė⁹ $SABC$, kurios pagrindas yra ABC , o šoninės briaunos ilgis lygus 2.

18.1. Piramidės aukštinės SO ilgį pažymėkime x (čia $x \in (0; 2)$), o piramidės pagrindo kraštinės ilgį pažymėkime y . Išreiškę y per x , parodykite, kad piramidės tūrį¹⁰ galima apskaičiuoti pagal formulę $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (4x - x^3)$.



(3 taškai)

Juodraštis

18.2. Nustatykite x reikšmę, su kuria piramidės tūris įgyja didžiausią reikšmę.

(3 taškai)

Juodraštis

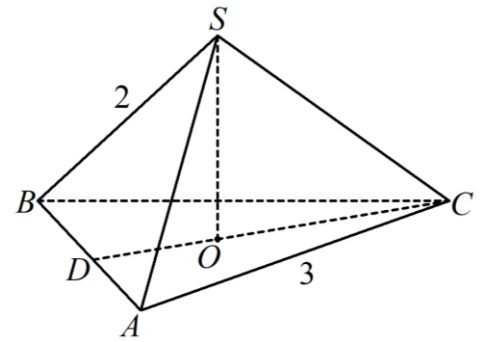
⁹ taisoklingoji trikampė piramidė – ostrosłup prawidłowy trójkątny – правильная треугольная пирамида – правильна трикутна піраміда

¹⁰ tūris – objętość – объем – об'єм

18.3. Tarkime, kad šios taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo kraštinės ilgis lygus 3. Piramidės šoninės sienos¹¹ plokštuma ir pagrindo plokštuma sudaro kampą, kurio didumas lygus α . Apskaičiuokite $\cos \alpha$.

(3 taškai)

Juodraštis



18.4. Įrodykite, kad $SC \perp AB$.

(1 taškas)

Juodraštis

¹¹ šoninė siena – ściana boczna – боковая грань – бічна грань

19. Yra žinoma, kad tiesė, einanti per tašką $A(3; 0)$, liečia¹² funkcijos $f(x) = e^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}} + \ln(2 - x) + a$ grafiką taške, kurio abscisė lygi 1. Nustatykite parametro a reikšmę.

(4 taškai)

Juodraštis

¹² liečia – jest styczna – касается – дотикається

- 20.** Vėžlys ir sraigė keliavo tiesia linija vienas priešais kitą: vėžlys nuo salotos lapo iki kopūsto, o sraigė – nuo kopūsto iki salotos lapo. Vėžlys nuo salotos lapo pajudėjo 6 val. vėliau, negu sraigė pradėjo šliaužti nuo kopūsto. Jiems susitikus, paaiškėjo, kad vėžlys nuėjo 24 metrais mažiau už sraigę. Po susitikimo praėjus 8 val. vėžlys pasiekė kopūstą, o sraigė salotos lapą pasiekė praėjus 9 val. po susitikimo. Nustatykite sraigės greitį, jeigu yra žinoma, kad visą kelionę vėžlys ir sraigė judėjo pastoviais greičiais.

(5 taškai)

Juodraštis

Juodraštis