

Rengiamės matematikos VBE,

I dalis A kursas

Matematikos VBE I dalies A kurso
2025 m. bandomojo patikrinimo užduotis:
sąlygos, atsakymai, sprendimai

beta.etestavimas.lt

NŠA
2025

Matematikos valstybinio brandos egzamino I dalis
Išplėstinis (A) kursas
Bandomasis patikrinimas
2025 m.

Šiandienos patikrinime rasite įvairių uždavinių. Atidžiai perskaitykite kiekvieną uždavinį ir pasistenkite kuo geriau jį išspręsti.

Jei kiltų techninių nesklandumų arba sistema „pakibtų“, prašytume šiek tiek palaukti ir tęsti darbą, kai tik sistema tai leis.

Patikrinimą sudaro 35 uždaviniai.

Teisingai išspręstas uždavinys vertinamas 1 arba 2 taškais.

Patikrinimo taškų suma yra 40 taškų.

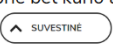
Patikrinimo trukmė yra 120 min.

Pasiekimų patikrinime turėsite išspręsti įvairius uždavinius:

- **atsakyti į klausimus su pasirinkamaisiais atsakymais**, t. y. pasirinkti vieną ar kelis, jūsų nuomone, teisingus atsakymus;
- **įrašyti skaičių nurodytoje vietoje**; skaičius reikia rašyti taisyklingai, t. y. nedėti papildomų tarpų, nerašyti nereikalingų simbolių;
- **paveikslė pažymėti reikiamą atsakymą**, t. y. kompiuterio ekrane pažymėti aktyvų tašką arba paveikslo dalį; tai galima padaryti, paspaudus reikiamą vietą pele.

Spauskite apačioje esančią rodyklę

Kas svarbu, atliekant šį pasiekimų patikrinimą

- **Atkreipkite dėmesį!** Kai kurie uždaviniai gali netilpti į kompiuterio langą, todėl peržiūrėkite uždavinį, naudodamiesi vertikalia slankijuoste ar kompiuterio pele.
- Jei norite naudotis skaičiuotuvu, paspauskite viršuje esantį skaičiuotuvo  ženklą.
- Pereiti prie tolesnio uždavinio galite spausdami arba apačioje esančią rodyklę , arba lango apačioje esantį reikiamą skrituliuką su skaičiumi.
- Išsprendus uždavinį, jo skrituliukas lango apačioje patamsės. Neišspręsto uždavinio skrituliukas liks baltas.
- Jeigu dėl savo atsakymo abejojate arba uždavinio neišsprendėte, galite paspausti mygtuką  ir pažymėti šį uždavinį, kad prie jo galėtumėte grįžti vėliau.
- Visada galite grįžti prie bet kurio ankstesnio uždavinio ir, jei reikia, atsakymą pataisyti.
- Paspaudę mygtuką  galite bet kuriuo testo atlikimo metu pasitikrinti, kuriuos uždavinius jau išsprendėte, o kurių dar ne.
- **SVARBU!** Mygtuką  spauskite tik tada, kai būsite tikri, jog norite pateikti visus savo atsakymus vertinti. Paspaudę šį mygtuką, savo atsakymų daugiau taisyti nebegalėsite.

Norėdami pradėti patikrinimą, spauskite apačioje esančią rodyklę.

MATEMATIKOS (A) VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO FORMULIŲ RINKINYS

Greitoji daugyba: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Logaritmai: $a^{\log_a b} = b$, $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$, $k \log_a b = \log_a (b^k)$,

$$\frac{1}{k} \log_a b = \log_{a^k} b, \quad \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b.$$

Trigonometrija:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Jei $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$, tai: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.	Jei $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$, tai: $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.	Jei $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, tai: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
---	---	---

Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $d = a_{n+1} - a_n$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

čia a_n – n -tasis narys, d – skirtumas, n – nario eilės numeris, S_n – pirmųjų n narių suma.

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $S = \frac{b_1}{1-q}$;

čia b_n – n -tasis narys, q – vardiklis ($q \neq 0$), n – nario eilės numeris, S_n – pirmųjų n narių suma, S – nykstamosios geometrinės progresijos suma.

Vektoriai: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia $|\vec{a}|$ – vektorių ilgis, $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ir $\vec{b} = (x_2; y_2)$ – vektorių koordinatės, α – kampo tarp vektorių didumas.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$, $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$,

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \angle C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R};$$

čia a, b ir c – trikampio kraštinių ilgiai, $\angle A$, $\angle B$ ir $\angle C$ – prieš jas esančių atitinkamų trikampio kampų didumai, p – trikampio pusperimetris, r – į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis, R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis.

Ritinis: $S_{\text{son. pav.}} = 2\pi RH$, $V = \pi R^2 H$; čia R – pagrindo spindulio ilgis, H – aukštinės ilgis.

Kūgis: $S_{\text{son. pav.}} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$; čia R – pagrindo spindulio ilgis, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{son. pav.}} = \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – pagrindų spindulių ilgiai, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Rutulys: $S_{\text{pav.}} = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; čia R – spindulio ilgis.

Rutulio nuopjova: $S_{\text{son. pav.}} = 2\pi RH$, $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Piramidės tūris: $V = \frac{1}{3} SH$; čia S – pagrindo plotas, H – aukštinės ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1 ir S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Išvestinės: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$,

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x);$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, liečiančios funkcijos grafiką taške $(x_0; f(x_0))$, lygtis:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$; čia $f'(x_0)$ – liestinės krypties koeficientas.

Integralai: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$

$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$; čia C – realusis skaičius.

Sukinio tūris: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

Kombinatorika: $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; čia C_n^k – derinių skaičius, A_n^k – gretinių skaičius.

Atsitiktinis dydis: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n, \quad DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$;

čia $x_1, x_2, \dots, x_n$ – atsitiktinio dydžio X reikšmės, $p_1, p_2, \dots, p_n$ – tų reikšmių tikimybės, EX – matematinė viltis (vidurkis), DX – dispersija.

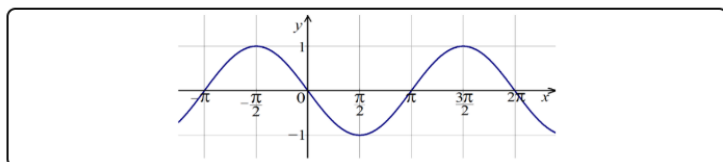
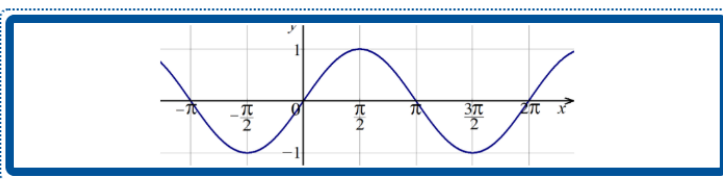
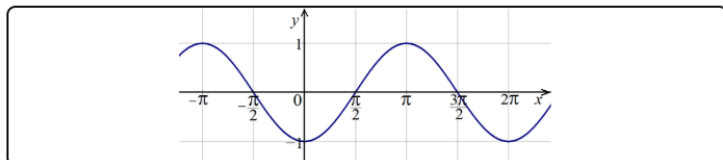
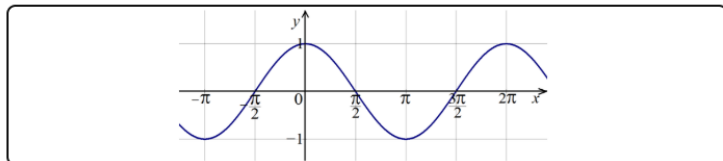
Binominiai bandymai: $P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

čia X – atsitiktinis dydis, n – bandymų skaičius, k – sėkmių skaičius, p – sėkmės tikimybė, $q = 1 - p$ – nesėkmės tikimybė.

Niutono binomo formulė: $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n.$

1. Pažymėkite paveikslą, kuriame pavaizduotas funkcijos $y = \sin x$ grafikas.

(1 taškas)



Sprendimas.

Viršutiniame paveiksle pavaizduotas $y = \cos(x)$ grafikas.

Antrame nuo viršaus pavaizduotas $y = -\cos(x)$ grafikas.

Apatiniame paveiksle pavaizduotas $y = -\sin(x)$ grafikas.

2. Duota funkcija $f(x) = 3^x$. Kuris taškas priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui? Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ $\left(-2; -\frac{1}{9}\right)$	☐ $(-1; -3)$	☒ $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$	☐ $(-1; 3)$
---	----------------------------------	---	---------------------------------

Sprendimas.

Paeiliui tikriname, ar lygybė $y = 3^x$ yra teisinga:

- kai $x = -2, y = -\frac{1}{9}$, tai lygybė $-\frac{1}{9} = 3^{-2}$ yra neteisinga $-\frac{1}{9} \neq \frac{1}{9}$, – taškas $\left(-2; -\frac{1}{9}\right)$ grafikui nepriklauso;
- kai $x = -1, y = -3$, tai lygybė $-3 = 3^{-1}$ yra neteisinga $-3 \neq \frac{1}{3}$, – taškas $(-1; -3)$ grafikui nepriklauso;
- kai $x = -2, y = \frac{1}{9}$, tai lygybė $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ yra teisinga $\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$, – taškas $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$ grafikui priklauso;
- kai $x = -1, y = 3$, tai lygybė $3 = 3^{-1}$ yra neteisinga $3 \neq \frac{1}{3}$, – taškas $(-1; 3)$ grafikui nepriklauso.

Atsakymas. $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$.

.

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{3-x} = 2$. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $x =$

Sprendimas.

Lygties $\sqrt{3-x} = 2$ apibrėžimo sritis $3-x \geq 0, -x \leq -3, x \leq 3; x \in (-\infty; 3]$.

Lygties abi pusės yra neneigiamos, todėl lygtį galima kelti kvadratu:

$$\sqrt{3-x} = 2, \quad \uparrow^2$$

$$3-x = 4,$$

$$x = -1.$$

Gautoji lygties nežinomojo reikšmė priklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Pasitikriname, ar teisinga lygybė

$$\sqrt{3-(-1)} = 2.$$

Lygybė $\sqrt{4} = 2$ yra teisinga.

Atsakymas. $x = -1$.

4. Duotos dvi skaičių aibės: $A = \{2; 5; 7; 11\}$ ir $B = \{3; 5; 13; 14; 15\}$. Nustatykite, kiek elementų priklauso aibių A ir B skirtumui $A \setminus B$.
Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ 1	☒ 3	☐ 4	☐ 8
-------------------------	------------------------------------	-------------------------	-------------------------

Sprendimas.

$$A \setminus B = \{2; 5; 7; 11\} \setminus \{3; 5; 13; 14; 15\} = \{2; 7; 11\}.$$

Atsakymas. 3.

5. Išspręskite nelygybę $3^{-x} < 3^{12}$. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ $x \in (12; +\infty)$

☐ $x \in (-\infty; 12)$

☒ $x \in (-12; +\infty)$

☐ $x \in (-\infty; -12)$

Sprendimas.

Nelygybės $3^{-x} < 3^{12}$ apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė: $x \in \mathbb{R}$.

Sprendžiame nelygybę:

$$3^{-x} < 3^{12}.$$

$3 > 1$ todėl, pereidami prie laipsnių rodiklių nelygybės, nelygybės ženklo nekečiame:

$$-x < 12, \quad | \cdot (-1)$$

$$x > -12.$$

Atsakymas. $x \in (-12; +\infty)$.

6. Išspręskite nelygybę $|x| \leq 9$. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ $x \in (-9; 9)$

☒ $x \in [-9; 9]$

☐ $x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$

☐ $x \in (-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$

Sprendimas.

Nelygybės $|x| \leq 9$ apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė: $x \in \mathbb{R}$.

Sprendžiame nelygybę:

$$\begin{aligned} |x| &\leq 9, \\ -9 &\leq x \leq 9. \end{aligned}$$

Atsakymas. $x \in [-9; 9]$.

7. Koordinačių plokštumoje pažymėtas taškas $A(3; 2)$ (žr. pav.).

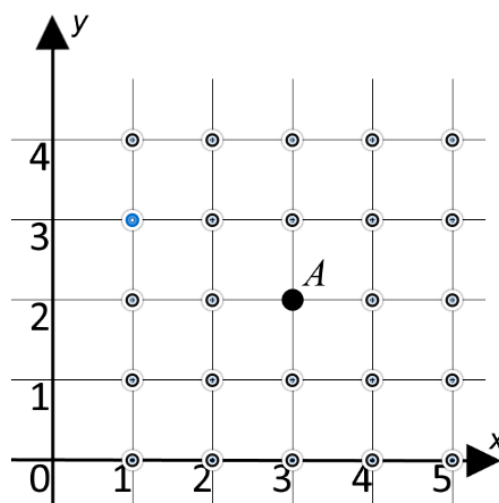
7.1. Koordinačių plokštumoje pažymėkite tašką taip, kad vektoriaus $\vec{a}$, nubrėžto iš taško A į jūsų pažymėtą tašką, koordinatės būtų $(-2; 1)$, t. y. $\vec{a} = (-2; 1)$.

(1 taškas)

7.2. Vektoriaus $\vec{b}$, nubrėžto iš taško $O(0; 0)$ į jūsų pažymėtą tašką, ilgis yra $\sqrt{m}$; čia m yra natūralusis skaičius. Nustatykite m reikšmę. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $m =$



Sprendimas.

7.1. Pažymime tašką, kuris nuo taško A yra per 2 vienetines atkarpas kairiau ir per 1 vienetinę atkarpą aukščiau – to taško koordinatės yra $(3 - 2; 2 + 1) = (1; 3)$.

Atsakymas. $(1; 3)$.

7.2. Naudodamiesi Pitagoro teorema arba atstumo tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų formule, apskaičiuojame vektoriaus $\vec{b}$ ilgį:

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Atsakymas. 10.

8. Apskaičiuokite $\sin\left(2026\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2024\pi + \pi)$. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas:

Sprendimas.

$$\sin\left(2026\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2024\pi + \pi) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = -1 + (-1) = -2.$$

Atsakymas. -2 .

Komentaras mokiniams.

Sinuso ir kosinuso mažiausias teigiamas periodas yra 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi \cdot k) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 2\pi \cdot k) = \cos(\alpha), \quad \text{čia } k \in \mathbb{Z}.$$

Tangento mažiausias teigiamas periodas yra π :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi \cdot k) = \operatorname{tg}(\alpha), \quad \text{čia } k \in \mathbb{Z}.$$

9. Suprastinkite reiškini $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ $a^2 - ab + b^2$

☐ $a^2 + b^2$

☐ $a^2 - b^2$

☒ $a^2 + ab + b^2$

Sprendimas.

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

Atsakymas. $a^2 + ab + b^2$.

10. Suprastinkite reiškinius. Pažymėkite teisingus atsakymus.

10.1. $3^{2\log_3 x} =$

(1 taškas)

- ☐ $2x$ ☐ $\frac{x}{2}$ ☐ $\sqrt{x}$ ☒ x^2

10.2. $\log_5 b + \log_5 \left(\frac{1}{b^2}\right) =$

(1 taškas)

- ☒ $\log_5 \left(\frac{1}{b}\right)$ ☐ $\log_5 \left(b + \frac{1}{b^2}\right)$ ☐ $\log_5 \left(\frac{1}{b^3}\right)$ ☐ $\log_5 (b^3)$

Sprendimas.

10.1.

$$3^{2\log_3 x} = 3^{\log_3(x^2)} = x^2.$$

Atsakymas. x^2 .

10.2.

$$\log_5(b) + \log_5\left(\frac{1}{b^2}\right) = \log_5\left(b \cdot \frac{1}{b^2}\right) = \log_5\left(\frac{1}{b}\right).$$

Atsakymas. $\log_5\left(\frac{1}{b}\right)$.

11. Jeigu $2^x = 7$, tai $2^{x+3} =$

(1 taškas)

☐ 10

☒ 56

☐ 21

☐ 42

Sprendimas.

$$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot 8 = 7 \cdot 8 = 56.$$

Atsakymas. 56.

12. Nustatykite, su kura m reikšme vektoriai $\vec{a} = (m; 6)$ ir $\vec{b} = (2; -3)$ yra kolinearūs. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☒ $m = -4$

☐ $m = 4$

☐ $m = -9$

☐ $m = 9$

Sprendimas.

Kolinearių vektorių atitinkamų koordinatų santykiai yra vienodi, todėl:

$$\frac{m}{2} = \frac{6}{-3}, \quad m = -4.$$

Atsakymas. $m = -4$.

13. Išspręskite lygtį $\lg(3x + 1) + 10 = 12$. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $x =$

Sprendimas.

Lygties $\lg(3x + 1) + 10 = 12$ apibrėžimo sritis: $3x + 1 > 0, x > -\frac{1}{3}; x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Sprendžiame lygtį:

$$\lg(3x + 1) + 10 = 12,$$

$$\lg(3x + 1) = 2,$$

$$\lg(3x + 1) = \lg(100),$$

$$3x + 1 = 100,$$

$$3x = 99,$$

$$x = 33.$$

Gautoji x reikšmė priklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Pasitikriname:

$$\lg(3 \cdot 33 + 1) + 10 = 12,$$

$$\lg(100) + 10 = 12,$$

$$2 + 10 = 12, - \text{lygybė teisinga.}$$

Atsakymas. $x = 33$.

14. Nykstamosios geometrinės progresijos suma lygi 5. Šios progresijos pirmasis narys yra 4. Apskaičiuokite šios nykstamosios geometrinės progresijos vardiklį q . Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☒ $q = \frac{1}{5}$

☐ $q = \frac{1}{4}$

☐ $q = -\frac{1}{4}$

☐ $q = -\frac{1}{5}$

Sprendimas.

Pasinaudoję sąlygos duomenimis $b_1 = 4, S = 5$ ir nykstamosios geometrinės progresijos sumos formule, sudarome lygtį:

$$\frac{b_1}{1 - q} = S,$$

$$\frac{4}{1 - q} = 5,$$

$$4 = 5 - 5q,$$

$$5q = 1,$$

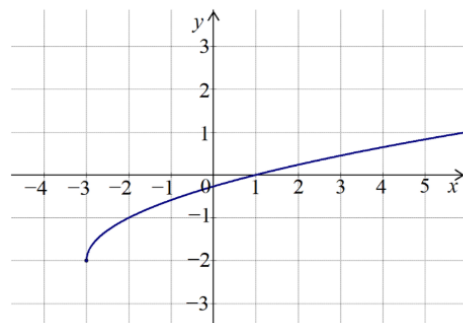
$$q = \frac{1}{5}.$$

Atsakymas. $q = \frac{1}{5}$.

15. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = \sqrt{x+a} + b$ grafikas. Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, nustatykite a ir b reikšmes. Įrašykite atsakymą į reikiamus langelius.

(2 taškai)

Atsakymas: $a =$, $b =$.



Sprendimas.

Iš paveikslėlio matome kad pavaizduotą funkcijos $y = \sqrt{x+a} + b$ grafiką galima gauti pastumiant $y = \sqrt{x}$ grafiką per 3 vienetines atkarpas į kairę ($a = 3$) ir per 2 vienetines atkarpas į apačią ($b = -2$).

Atsakymas. $a = 3$, $b = -2$.

16. Jeigu $3 < \sqrt[3]{a} < 11$, tai $m < a < 1331$; čia m – natūralusis skaičius. Nustatykite didžiausią galimą m reikšmę. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas: $m =$

Sprendimas.

Dvigubą nelygybę $3 < \sqrt[3]{a} < 11$ keliame trečiuoju laipsniu:

$$3 < \sqrt[3]{a} < 11, \quad \uparrow^3.$$

$$3^3 < (\sqrt[3]{a})^3 < 11^3,$$

$$27 < a < 1331.$$

Atsakymas. $m = 27$.

17. Skaičių trejetas $(x; y; z)$ yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ -x + z = 9, \\ -y + z = 8 \end{cases}$ sprendinys. Nustatykite z reikšmę. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $z =$

Sprendimas.

Lygčių sistemą patogiau spręsti sudėties būdu – sudėję visas tris sistemos lygtis gauname lygtį su vienu nežinomuoju:

$$+ \begin{cases} x + y + z = 4, \\ -x + z = 9, \\ -y + z = 8; \end{cases}$$
$$3z = 21,$$
$$z = 7.$$

Atsakymas. $z = 7$.

18. Nustatykite nelygybės $\log_{\frac{1}{3}} x > -4$ didžiausią sveikąjį sprendinį. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:

Sprendimas.

Nelygybės $\log_{\frac{1}{3}} x > -4$ apibrėžimo sritis: $x > 0$.

Sprendžiame nelygybę:

$$\log_{\frac{1}{3}} x > -4,$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4},$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} (3^4),$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 81,$$

$$x < 81.$$

Didžiausias sveikasis nelygybės sprendinys yra 80.

Atsakymas. $x = 80$.

19. Yra žinoma, kad $a^{0,1} = 5$. Apskaičiuokite $\sqrt{a^{\frac{3}{5}}}$. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas:

Sprendimas.

$$a^{0,1} = a^{\frac{1}{10}} = 5,$$

$$\sqrt{a^{\frac{3}{5}}} = \left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{10}} = a^{\frac{1}{10} \cdot 3} = \left(a^{\frac{1}{10}}\right)^3 = 5^3 = 125.$$

Atsakymas. $\sqrt{a^{\frac{3}{5}}} = 125.$

20. Funkcijos $f(x) = \log_a(x + b)$ apibrėžimo sritis yra intervalas $(3; +\infty)$. Yra žinoma, kad taškas $A(124; 2)$ priklauso šios funkcijos grafikui. Nustatykite a reikšmę. *Įrašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas: $a =$

Sprendimas.

Funkcijos $\log_a(x + b)$ apibrėžimo sritis: $a > 0, a \neq 1; x + b > 0, x > -b, x \in (-b; +\infty)$.

Pagal sąlygą $x \in (3; +\infty)$, todėl $b = -3$. Turime $y = \log_a(x - 3)$.

Į funkcijos lygtį įrašome tos funkcijos grafikui priklausančio taško $(124; 2)$ koordinates:

$$2 = \log_a(124 - 3),$$

$$2 = \log_a(121),$$

$$a^2 = 121,$$

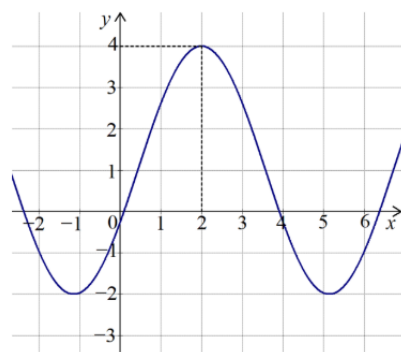
$$a = -11 \text{ (netinka),}$$

$$a = 11.$$

Atsakymas. $a = 11$.

21. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = a \cos(x - b) + 1$ grafikas. Naudodamiesi paveiksle pateiktais duomenimis, nustatykite a ir b reikšmes; čia $a > 0$ ir $b \in [-\pi; \pi]$. Įrašykite atsakymą į reikiamus langelius.

(2 taškai)

Atsakymas: $a =$, $b =$.**Sprendimas.**

Iš paveikslo matome, kad pavaizduotas grafikas yra gautas $y = \cos(x)$ grafiką:

- pastūmus per 2 vienetines atkarpas į dešinę ($b = 2$),
- pastūmus per 1 vienetinę atkarpą į viršų ($+1$),
- trigubai ištempus ordinačių ašies kryptimi ($a = 3$).

Atsakymas. $a = 3$, $b = 2$.

22. Yra žinoma, kad funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritis $E(f) = [-5; 3]$. Nustatykite funkcijos $y = |f(x)|$ reikšmių sritį. *Rašykite atsakymą į reikiamus langelius.*

(1 taškas)

Atsakymas: [;]

Sprendimas.

Modulis neigiamas funkcijos reikšmes „konvertuoja“ į teigiamas, o neneigiamų reikšmių nepakeičia.

Atsakymas. $E_{|f|} = [0; 5]$.

23. Išspręskite lygtį $|2 - x| = x - 2$. Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☐ $x = 2$

☐ $x \in (-\infty; +\infty)$

☐ $x \in (-\infty; 2]$

☒ $x \in [2; +\infty)$

Sprendimas.

Lygtis $|2 - x| = x - 2$ neturi sprendinių, kai lygties dešinioji pusė yra neigiama: $x - 2 < 0, x < 2$.

Sprendžiame lygtį:

$$|2 - x| = x - 2,$$

$$|x - 2| = x - 2.$$

Ši lygybė yra teisinga su visomis neneigiamomis $x - 2$ reikšmėmis:

$$x - 2 \geq 0,$$

$$x \geq 2.$$

Atsakymas. $x \in [2; +\infty)$.

Priminimas.

1. $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

2. $|a - b| = |b - a|$.

24. Kurios dvi iš pateiktų nelygybių neturi sprendinių? Pažymėkite du teisingus atsakymus.

(2 taškai)

☐ $(7x - 2)^2(x - 3) < 0$

☐ $|4x + 12| \geq 0$

☒ $(3 - \sqrt{2})^x \leq 0$

☒ $(3x - 27)^6 < 0$

☐ $\frac{x^2 + 5}{(x + 5)^2} > 0$

Sprendimas.

Pirmosios nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai mažesni už 3 ($x - 3 < 0$) ir nelygūs $\frac{2}{7}$ ($7x - 2 \neq 0$).

Antrosios nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai.

Paskutiniosios nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai, išskyrus -5 .

Atsakymas. $(3 - \sqrt{2})^x < 0$, $(3x - 27)^6 < 0$.

25. Apskritimo centras yra taškas $O(1; 0)$, o spindulys $R = \sqrt{17}$. Taškas $A(2; t)$ priklauso apskritimui; čia $t > 0$. Apskaičiuokite t reikšmę. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $t =$

Sprendimas.

Apskritimo lygtis $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{17})^2$, $(x - 1)^2 + y^2 = 17$.

Taško $A(2; t)$ koordinatės tenkina apskritimo lygtį:

$$(2 - 1)^2 + t^2 = 17,$$

$$1 + t^2 = 17,$$

$$t^2 = 16,$$

$$t = -4 \text{ (netinka),}$$

$$t = 4.$$

Atsakymas. $t = 4$.

Priminimas.

Apskritimo, kurio centras yra koordinačių plokštumos pradžios taškas $O(0; 0)$, o spindulio ilgis lygus r , lygtis yra

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Apskritimo, kurio centras yra koordinačių plokštumos taškas $A(a; b)$, o spindulio ilgis lygus r , lygtis yra

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

26. Geometrinė progresija (b_n) apibrėžta rekurenciāja formule $b_{n+1} = 3b_n$, $b_1 = \frac{1}{9}$. Kokia yra šios progresijos n -tojo nario formulė?
Pažymėkite teisingą atsakymą.

(1 taškas)

☒ $b_n = 3^{n-3}$

☐ $b_n = 3^{1-2n}$

☐ $b_n = 3^{1-n}$

☐ $b_n = 3^{n-1}$

Sprendimas.

Iš formulės $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$ matome, kad geometrinės progresijos vardiklis $q = 3$, o pirmasis narys $b_1 = \frac{1}{9}$ duotas sąlygoje.

Pasinaudojame geometrinės progresijos n -ojo nario formule:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1} = 3^{-2} \cdot 3^{n-1} = 3^{-2+n-1} = 3^{n-3}.$$

Atsakymas. $b_n = 3^{n-3}$.

27. Jeigu $\lg 2 = a$, tai $\log_2 50 =$

(1 taškas)

☐ $\frac{1-a}{a}$	☐ $\frac{a}{1-a}$	☒ $\frac{2-a}{a}$	☐ $\frac{a}{2-a}$
---------------------------------------	---------------------------------------	--	---------------------------------------

Sprendimas.

$$\log_2 50 = \frac{\lg 50}{\lg 2} = \frac{\lg \left(\frac{100}{2} \right)}{a} = \frac{\lg 100 - \lg 2}{a} = \frac{2-a}{a}.$$

Atsakymas. $\frac{2-a}{a}$.

28. Aibės A , B ir C pavaizduotos Veno diagrama. Kurį atvejį vaizduoja geltonai nuspalvinta Veno diagramos dalis? Pažymėkite teisingą atsakymą.

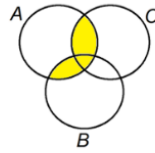
(1 taškas)

☐ $(A \cap B) \cup (A \cup C)$

☒ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

☐ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

☐ $(A \cup B) \cap (A \cap C)$



Atsakymas. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

29. Aritmetinės progresijos pirmųjų 11 narių suma lygi -22 . Apskaičiuokite šios progresijos šeštąjį narį. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $a_6 =$

Sprendimas.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11.$$

Žinoma, kad:

$$\frac{a_1 + a_{11}}{2} = a_6,$$

$$\frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = -22, \Rightarrow \frac{a_1 + a_{11}}{2} = -2, \Rightarrow a_6 = -2.$$

Atsakymas. $a_6 = -2$.

30. Nustatykite, su kuria parametro a reikšme lygtis $ax - 4 - a + 4x = 0$ turi be galo daug sprendinių. Įrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $a =$

Sprendimas.

Tapačiai pertvarkome lygtį:

$$ax - 4 - a + 4x = 0,$$

$$ax + 4x = a + 4,$$

$$(a + 4) \cdot x = a + 4.$$

Ši lygtis turi vienintelį sprendinį

$$x = \frac{a + 4}{a + 4} = 1,$$

kai $a + 4 \neq 0, a \neq -4$.

Kai $a = -4$, tai lygtis

$$(-4 + 4) \cdot x = -4 + 4,$$

$$0 \cdot x = 0$$

turi be galo daug sprendinių: $x \in \mathbb{R}$.

Atsakymas. $a = -4$.

31. Reiškini $\frac{4a^{\frac{3}{2}} - 3 + 6a^{\frac{1}{2}} - 2a}{2a^{\frac{1}{2}} - 1}$ galima suprastinti ir užrašyti pavidalu $m \cdot a + n$; čia m ir n yra realieji skaičiai. Nustatykite n reikšmę.
Jrašykite atsakymą.

(1 taškas)

Atsakymas: $n =$ **Sprendimas.**

$$\begin{aligned} \frac{4a^{\frac{3}{2}} - 3 + 6a^{\frac{1}{2}} - 2a}{2a^{\frac{1}{2}} - 1} &= \frac{4\sqrt{a^3} - 3 + 6\sqrt{a} - 2a}{2\sqrt{a} - 1} = \frac{(4a\sqrt{a} + 6\sqrt{a} - 2a - 3) \cdot (2\sqrt{a} + 1)}{(2\sqrt{a} - 1) \cdot (2\sqrt{a} + 1)} = \\ &= \frac{8a^2 + 12a - 4a\sqrt{a} - 6\sqrt{a} + 4a\sqrt{a} + 6\sqrt{a} - 2a - 3}{(2\sqrt{a})^2 - 1^2} = \frac{8a^2 + 10a - 3}{4a - 1} = \\ &= \frac{8\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{1}{4}\right)}{4a - 1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{1}{4}\right)}{4a - 1} = \frac{(2a + 3)(4a - 1)}{4a - 1} = 2a + 3. \end{aligned}$$

Atsakymas. $n = 3$.

32. Funkcija $y = f(x)$ tenkina lygybę $f(2x) = f(x) - 3x$, kai $x \in \mathbb{R}$.
Apskaičiuokite $f(5)$, jeigu $f(10) = 6$. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas: $f(5) =$

Sprendimas.

Kadangi

$$f(2x) = f(x) - 3x,$$

$$f(10) = 6,$$

tai

$$f(10) = f(2 \cdot 5) = f(5) - 3 \cdot 5,$$

$$f(10) = f(5) - 15,$$

$$6 = f(5) - 15,$$

$$f(5) = 21.$$

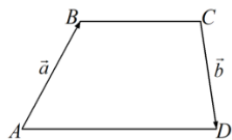
Atsakymas. $f(5) = 21$.

33. Paveiksle pavaizduota trapezija $ABCD$. Yra žinoma, kad $BC \parallel AD$ ir $BC : AD = 2 : 3$.

Vektorių $\overrightarrow{BC}$ galima išreikšti vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ taip: $\overrightarrow{BC} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$; čia m ir n yra sveikieji skaičiai. Nustatykite skaičių m ir n reikšmes. *Jrašykite atsakymą į reikiamus langelius.*

(1 taškas)

Atsakymas: $m =$; $n =$



Sprendimas.

1. Kadangi $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$, tai $AD = \frac{3}{2} \cdot BC$, $BC = \frac{2}{3} \cdot AD$, ir $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + (\vec{a} + \vec{b})$, $\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + (\vec{a} + \vec{b})$, $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.

Atsakymas. $m = 2, n = 2$.

34. Duotos dvi funkcijos: $f(x) = 5^{x+2}$ ir $g(x) = \cos^2 x$. Nustatykite funkcijos $h(x) = f(g(x))$ mažiausią reikšmę. *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas:

Sprendimas.

Randame $h(x)$:

$$f(g(x)) = 5^{\cos^2 x + 2}.$$

Rodiklinė funkcija $y = 5^x$ yra didėjančioji, nes laipsnio pagrindas yra didesnis už 1 ($5 > 1$), todėl reiškinys $5^{\cos^2 x + 2}$ mažiausią reikšmę įgyja, kai laipsnio rodiklio $\cos^2 x + 2$ reikšmė yra mažiausia.

Reiškinio $\cos^2 x + 2$ reikšmės priklauso nuo $\cos^2 x$ reikšmių. Reiškinio $\cos^2 x$ mažiausia reikšmė yra 0 (kitos reikšmės yra didesnės už 0).

Vadinasi, funkcijos

$$h(x) = 5^{\cos^2 x + 2}$$

mažiausioji reikšmė lygi

$$5^{0+2} = 5^2 = 25.$$

Atsakymas. 25.

35. Skaičiai a , b ir c yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos, kurios skirtumas lygus -3 , nariai. Skaičiai 3^c , 3^b ir 3^a yra trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai. Apskaičiuokite geometrinės progresijos vardiklį q . *Irašykite atsakymą.*

(1 taškas)

Atsakymas: $q =$

Sprendimas.

Užrašome nurodytą aritmetinę progresiją tarę, kad pirmasis jos narys yra a :

$$a, \quad a - 3, \quad a - 6.$$

Užrašome nurodytą geometrinę progresiją:

$$3^{a-6}, \quad 3^{a-3}, \quad 3^a.$$

Apskaičiuojame geometrinės progresijos vardiklį:

$$q = 3^{a-3} : 3^{a-6} = 3^{a-3-(a-6)} = 3^{a-3-a+6} = 3^3 = 27.$$

Atsakymas. 27.