12. Matematiniai žaidimai. C dalis

Įvadas

Mokytojui

Matematinių žaidimų tema, be abejo, skamba patraukliai ir suteikia galimybę interaktyviai ieškoti sprendimo būdų, žaidžiant kartu su draugu. Vis dėlto sistemingas tokių uždavinių sprendimas, ieškant pergalingos strategijos, ne visada yra paprastas. Medžiagoje pateiktas ir tokių uždavinių kontekstas, ir pagrindinės taktikos, kurias galima naudoti bandant juos išspręsti. Jaunesnių klasių mokiniams gali būti naudinga panagrinėti tuos metodus kartu su mokytoju.

Modulis skirtas 7–8 klasių mokiniams arba jaunesniems, jeigu jie atliko A ir B dalis.

Mokiniui

Žaidimų (arba lošimų) teorija kaip matematikos sritis analizuoja strategijas pačiose įvairiausiose situacijose. Ji ypač svarbi ekonomikoje, tačiau taip pat gali būti naudojama politikoje, psichologijoje ar filosofijoje. Pavyzdžiui, vienas iš 1994 metų Nobelio ekonomikos premijos laureatų buvo matematikas Johnas Nashas, 1950-aisiais savo daktaro disertacijoje padėjęs pamatus žaidimų teorijai (kai ją gynėsi, jam tebuvo 21 metai). 2005 metų Nobelio ekonomikos premija skirta Izraelio ir JAV mokslininkams, aprašiusiems konfliktus ir bendradarbiavimą naudojant žaidimo teorijos metodus. Taigi žaidimai nėra lengvabūdiškas ir nereikšmingas laiko leidimo būdas – matematikai juos paverčia svarbiais atradimais. Beje, šie trys matematikai, anaiptol, nėra vieninteliai, gavę Nobelio ekonomikos premijas (taigi neteisūs tie, kurie sako, kad matematikams nėra šansų gauti šią premiją).

Be abejo, už čia pateiktų uždavinių sprendimą Nobelio premijos negausite, ir į rimtus žaidimų teorijos uždavinius jie dar nelabai panašūs, tačiau pati *geriausios strategijos paieškos* idėja čia bus svarbi.

Paprastai matematinių žaidimų esmė yra tokia: yra tam tikros žaidimo taisyklės (koks gali būti ėjimas); dažniausiai du (kartai gali būti ir vienas arba daugiau nei du) žaidėjai ar žaidėjų grupės, kurie pakaitomis daro ėjimus. Reikia rasti (arba bent jau įrodyti, kad egzistuoja arba neegzistuoja) tokią žaidimo strategiją, kuri pirmam arba antram pradedančiam užtikrina laimėjimą, nesvarbu, kaip protingai bežaistų kitas žaidėjas.

Pagrindiniai metodai ar būdai, padedantys surasti tokią strategiją nesudėtinguose uždaviniuose, gali būti šie:

- Ėjimas „nuo galo“, siekiant atsidurti galutinį pergalingą žingsnį užtikrinančioje pozicijoje, kokia turėtų būti pergalinga pozicija prieš tai ir t. t.
- Visų galimų variantų perrinkimas. Aišku, toks metodas veikia tik tada, kai variantų nėra itin daug. Pavyzdžiui, galite nesunkiai perrinkti tradicinio žaidimo „Kryžiukai ir nuliukai“ variantus tam, kad įsitikintumėte, jog neegzistuoja pergalinga strategija šiam žaidimui, jeigu abu žaidėjai žaidžia protingai. Beje, kartais naudinga pažaisti tuos žaidimus su draugu, kad pajustumėte žaidimą ar pastebėtumėte dėsningumus. Svarbu atsiminti tai, kad jeigu pavyks nors ir dešimt kartų iš eilės laimėti žaidimą, dar nereiškia, jog radote pergalingą strategiją ar išsprendėte uždavinį. Gal Jums tiesiog pasisekė arba Jūsų žaidimo partneris nežino, kaip protingai žaisti. Pergalinga strategija reiškia užtikrintą laimėjimą, nesvarbu, koks būtų priešininko ėjimas.
- Simetrija. Ne visada akivaizdu, kur galima ją įžvelgti, tad sunkiausia uždavinio sprendimo dalis ir gali būti surasti arba sukonstruoti tokią simetriją, kuri leistų, pavyzdžiui, simetriškai kartoti priešininko ėjimus, užsitikrinant pergalę (dažnai žaidime pralaimi tas, kuris jau neturi ėjimo, o jei galite simetriškai kartoti priešininko ėjimus, vadinasi, jis pirmasis ir liks be ėjimo).

Kūrybingai taikydami šiuos metodus, nesunkiai išspręsite uždavinius. Atkreipkite dėmesį į pateiktą pavyzdį.

12. Matematiniai žaidimai. C dalis

Kaip spręsti?

Žaidime „Kas pirmas pasakys skaičių 100?“ dalyvauja du žaidėjai. Pirmas pasako bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 imtinai. Antras prideda prie pasakyto bet kurį patinkantį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 ir pasako sumą. Prie šios sumos pirmas vėl prideda bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9, pasako naują sumą ir t. t. Laimi tas, kuris pirmas pasakys skaičių 100. Šiame žaidime pirmas žaidėjas visada praloš, jei tik jo priešininkas atskleis vieną paslaptį. Kokia tai paslaptis, lemianti pergalę antram žaidėjui?

Sprendimas

Pabandykime spręsti „nuo galo“: kokį skaičių turiu pasakyti prieš 100, kad kokį skaičių bepasirinktų mano priešininkas, aš kitu ėjimu galėčiau sau užsitikrinti pergalę? Akivaizdu, jei pasakysiu 90, kokį skaičių nuo 1 iki 9 bepridėtų mano priešininkas, visada galėsiu pridėti tiek, kad pasiekčiau 100 (jei pasirinks 1, pridėsiu 9; jei 2 – 8, jei 3 – 7 ir t. t.). Taigi, jei užsitikrinsiu sau 90, laimėsiu. Tada tereikia pažiūrėti, kaip užsitikrinti 90. Analogiškai samprotaujant tam reikia prieš tai „turėti“ 80, dar anksčiau 70, 60, 50, 40, 30, 20 ir 10. Kad būtų 10, gali užtikrinti antras žaidėjas – kokį skaičių pirmu ėjimu bepasakytų pirmas, antras gali pridėti tiek, kad gautų 10.

O dabar *pažaiskite* patys!

Uždaviniai

1. Du žaidėjai paeiliui ant lentos rašo natūraliuosius skaičius iki 10. Pagal žaidimo taisykles negalima rašyti skaičių, kurie yra dalikliai jau parašytų skaičių. Pralaimi žaidėjas, kuris negali atlikti kito ėjimo. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Čia sukurti simetriją sudėtingiau, tačiau pabandykite. Kokio skaičiaus pasirinkimas iš žaidimo „išmestų“ iškart visą eilę kitų skaičių ir paliktų galimybę sudaryti kelias poras?

S. Pergalingą strategiją turi pirmas žaidėjas. Jam reikia pirmu ėjimu parašyti skaičių 6. Paskui galima rašyti tik skaičius 4, 5, 7, 8, 9, 10. Suskirstykime juos į poras (4; 5), (7; 9), (8; 10). Tada, atsakydamas į bet kurį antro žaidėjo ėjimą, pirmas visada galės parašyti jo pasirinkto skaičiaus porininką.

2. Dviese žaidžia tokį žaidimą: pirmasis pasako natūralųjį skaičių nuo 2 iki 9, antrasis padaugina tą skaičių iš bet kurio natūraliojo skaičiaus nuo 2 iki 9. Paskui pirmasis padaugina rezultatą iš bet kurio natūraliojo skaičiaus nuo 2 iki 9 ir t. t. Laimės tas, kuris pirmas gaus sandaugą, didesnę už 1000. Kas laimės – pradedantysis ar jo priešininkas?

P. Reikėtų panagrinėti pergalingas pozicijas „nuo galo“.

12. Matematiniai žaidimai. C dalis

S. Nagrinėkite pergalingas pozicijas „nuo galo“. Akivaizdu, kad, jei vieno iš žaidėjų paskutinė pozicija bus skaičius nuo 112 iki 999, tai kitas dar vienu ėjimu laimės (visada galės padauginti iš tokio skaičiaus, kad gautų daugiau nei 1000). Kad užsitikrintų sau tokią poziciją, laimėtojas prieš tai turi turėti kokį nors skaičių nuo 56 iki 111. Tada jo priešininkas, iš kiek bedaugintų turimą skaičių, pateks į intervalą nuo 112 iki 999. Kad laimėtojas turėtų intervalą nuo 56 iki 111, prieš tai jo priešininkas turi pakliūti į intervalą nuo 7 iki 55. Kad tai padarytų, laimėtojas iš pradžių turi pasakyti bet kurį iš skaičių 4, 5 arba 6. Taigi protingai žaisdamas laimės pirmas žaidėjas.

3. Šachmatų lentos, kurios dydis $n \times n$ langelių, kampe stovi šaškė. Du žaidėjai paeiliui perstato ją į gretimą langelį, turintį bendrą kraštinę su langeliu, kuriame stovi šaškė. Sugrįžti į langelį, kuriame jau buvo šaškė, draudžiama. Pralaimi tas, kuris neturi, kur eiti.

a) Įrodykite, kad pradedantis žaidimą gali pasiekti pergalę, kai n lyginis, o jei n nelyginis, tai protingai žaisdamas laimės antras žaidėjas.
b) Kas laimės, jei žaidimo pradžioje šaškė stovės ne kampiniame langelyje, o gretimame?

P. Pabandykite šachmatų lentoje išdėlioti domino kauliukus.

S. a) Sakykime, n – nelyginis. Šiuo atveju visoje $n \times n$ dydžio lentoje, išskyrus kampinį langelį, galima išdėlioti domino kauliukus 2×1. Antras žaidėjas tada gali laikytis tokios pergalingos strategijos: kai pirmas žaidėjas pastato šaškę į vieną iš dviejų kurio nors domino kauliuku dengiamų langelių, tai antras žaidėjas būtinai turi užimti kitą to paties domino kauliuko langelį. Tokiu būdu jis tikrai iškovos pergalę, jei tik pirmas dar turės ėjimą.

Jei n – lyginis, visoje $n \times n$ dydžio lentoje galima išdėlioti domino kauliukus. Šiuo atveju laimės pirmas žaidėjas, jei laikysis prieš tai aprašytos antro žaidėjo strategijos – tereikia įsivaizduoti, kad antras žaidėjas jau pastatė šaškę ant kampinio langelio.

b) Šiuo atveju visada laimės pirmas žaidėjas. Kai n lyginis, įrodoma analogiškai: a) atvejis (lentoje iš karto išdėliojami domino kauliukai, o pirmasis žaidėjas elgiasi, kaip anksčiau aprašyta). Tarkime, n – nelyginis. Tada pirmasis gali „atkirsti“ kampinį lentos langelį (antras žaidėjas į jį vis tiek nepateks, nes šis ne tos spalvos), likusioje lentos dalyje išdėliojami domino kauliukai ir vėl ėjimai atliekami pagal aprašytą taktiką.

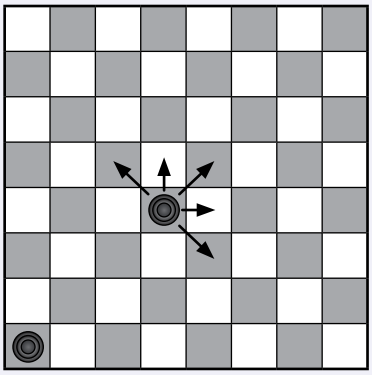
4. Du žaidėjai paeiliui stato šaškes (pirmas – baltas, antras – juodas) ant šachmatų lentos, kurios dydis 25×25 langeliai. Šaškes galima statyti and bet kurio laisvo langelio, išskyrus tuos, kurių visi gretimi langeliai yra užimti – išdėliotos tos pačios spalvos šaškės. Pralaimi tas, kuris negali atlikti ėjimo. Kas laimės – pirmas ar antras žaidėjas? (Langeliai yra gretimi, jei turi bendrą kraštinę.)

P. Panašiai kaip ankstesniame uždavinyje.

12. Matematiniai žaidimai. C dalis

S. Pergalinga strategija tokia pat kaip ankstesnio žaidimo. Tik šiuo atveju žaidimo pradžioje šaškės dar ne ant lentos. Vieną iš jų pirmu ėjimu turi pastatyti pirmas žaidėjas. Vėl išdėliojate ant lentos domino kauliukus 2×1. Pirmas žaidėjas visada laimės, jei pirmu savo ėjimu pastatys šaškę į langelį, likusį be poros, o toliau laikysis ankstesniame uždavinyje aprašytos taktikos.

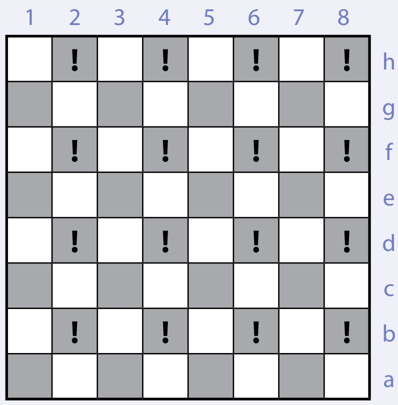
5. Šachmatų lentos apatiniame kairiajame langelyje padėta šaškė. Du žaidėjai iš eilės perstato ją į gretimą langelį (leidžiamos tik 1 pav. nurodytos judėjimo kryptys). Laimi tas, kuris savo ėjimu šaškę pastato į viršutinį dešinįjį lentos langelį. Kaip turi žaisti pradedantysis, kad laimėtų?



1 pav.

P. Reikėtų panagrinėti pergalingas pozicijas „nuo galo“.

S. Nagrinėdami žaidimą nuo pabaigos matome, kad h8 langelis yra sėkmingas, nes ant jo pastačius šaškę laimima. O gretimi langeliai h7, g7, g8 – nesėkmingi. Tuomet langeliai h6 ir f8 – sėkmingi, nes iš jų galima pakliūti tik į nesėkmingus langelius. Toliau taip samprotaudami galėsite nustatyti visus sėkmingus ir nesėkmingus langelius. Sėkmingus langelius pažymėkite šauktukais (2 pav.). Taigi pradedantis žaidimą stato šaškę į sėkmingus langelius ir laimi. Antras žaidėjas sukliudyti negali, nes iš vieno sėkmingo langelio patekti į kitą sėkmingą langelį neįmanoma.



2 pav.

6. Du žaidėjai paeiliui spalvina 4×4 lentos langelius (kiekvienu ėjimu po vieną langelį). Pralaimi tas, kuris pirmasis nuspalvina kokį nors 2×2 kvadratą. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga?

P. Kaip padalyti lentos langelius į poras, kad būtų galima simetriškai kartoti priešininko ėjimus?

S. 3-iame paveikslėlyje pavaizduota lenta. Joje langeliai padalyti į poras (x, x). Jei pirmas žaidėjas nuspalvina kurį nors poros langelį, antras nuspalvina atitinkamą kitą tos pačios poros langelį. Taip antras žaidėjas laimi.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

3 pav.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa