

**2023 METŲ PAKARTOTINĖS SESIJOS MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS
 EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA**

I dalis

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	A	A	D	C	C	B	A	D	D	B

II dalis

11	$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$
12.1	$x \in [0; 5]$ (arba $[0; 5)$)
12.2	-5
12.3	$y \in [-3; 6]$ (arba $[-3; 6)$)
13	$\cos \angle ABC = -\frac{1}{2}$ (arba $-\frac{1}{2}$)
14.1	$0,25$ (arba $\frac{1}{4}$)
14.2	$P(A) = \frac{2}{15}$ (arba $0,1(3)$)
15.1	75°
15.2	$S = 25$ (arba 25)
16	$y = 11 - 3x$
17	$\sin \alpha$
18	$p^2 - q$

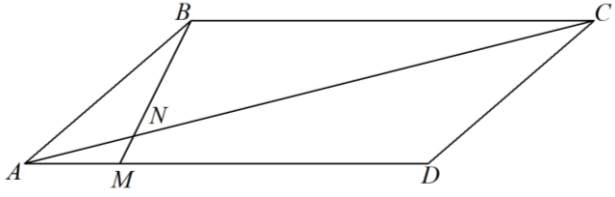
III dalis

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		2	
19.1	$m(4) = 20 \cdot 3^{0,25 \cdot 4} = 20 \cdot 3 = 60$ (muselių). Ats.: 60 muselių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
19.2	$20 \cdot 3^{0,25 \cdot t} = 4860$, $3^{0,25 \cdot t} = 243$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$0,25t = 5$, $t = 20$ (val.). Ats.: po 20 valandų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

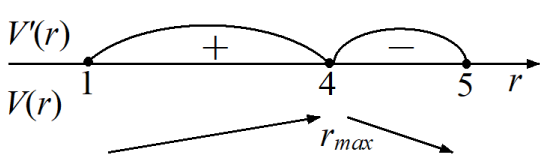
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		6	
20.1	$25 + 27 + 29 = 81$. Arba $S_3 = \frac{25 + 29}{2} \cdot 3 = 81$. Ats.: 81 vieta.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.2		2	
	$25 + 2(n - 1) = 101$,	1	Už teisingai sudarytą tiesinę lygtį.
	$2n - 2 = 76$, $n = 39$ (eil.). Ats.: 39 eilės.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.3		3	
	$S_n = \frac{2 \cdot 25 + 2(n - 1)}{2} \cdot n = (24 + n)n$.	1	Už teisingai pritaiktą ir pertvarkytą aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę.
	$n = 9k, k \in N$; $(24 + 9k) \cdot 9k =$	1	Už teisingai pasirinktą įrodymo būdą.
	$= (8 + 3k) \cdot 27k$. Kadangi $(8 + 3k)k \in N$ su $k \in N$, tai $27 \cdot (8 + 3k)k$ dalijasi iš 27.	1	Už pagrindimą, kad sandauga dalijasi iš 27.

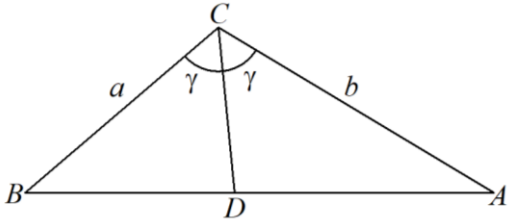
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		5	
21.1		2	
	$\log_2(x^2 - 1) = 3,$ $x^2 - 1 = 2^3,$	1	Už teisingai pritaikytą logaritmo apibrėžimą.
	$x^2 = 9,$ $x = \pm 3.$ <i>Ats.: $x = \pm 3.$</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		3	
	$\sqrt{x+3} + 2x = 0,$ $\sqrt{x+3} = -2x,$ $x+3 = 4x^2,$	1	Už teisingai pasirinktą iracionaliosios lygties sprendimo būdą.
	$4x^2 - x - 3 = 0,$ $x = -\frac{3}{4}$ arba $x = 1.$	1	Už gautus teisingus kvadratinės lygties sprendinius.
	Patikriname sprendinius, ar tinka pradinei lygčiai: $x = -\frac{3}{4}$ tinka, $x = 1$ netinka. <i>Ats.: $x = -\frac{3}{4}.$</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas										
22		6											
22.1		2											
	Įvykis A – „moneta atvirto arba tris kartus herbu, arba tris kartus skaičiumi“. Todėl $m = 2$, o $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.	1	Už įvykiui palankių arba visų baigčių skaičiaus nustatymą.										
	$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. $Ats.: \frac{1}{4}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.										
22.2.1		2											
	$\{(H; H; S); (H; S; H); (S; H; H)\}$	1	Už teisingai išvardytas įvykiui $X = 2$ palankias baigtis.										
	$P(X = 2) = \frac{3}{8}$. $Ats.: \frac{3}{8}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.										
22.2.2		2											
	$P(X = 1) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$. <table border="1"><tr><td>m</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$P(X = m)$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr></table>	m	0	1	2	3	$P(X = m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	Už teisingai užpildytą lentelę.
m	0	1	2	3									
$P(X = m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$									
	$EX = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$. $Ats.: 1,5$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.										

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		4	
23.1		2	
	 Trikampiai AMN ir CBN yra panašūs pagal du kampus, nes $\angle ANM = \angle CNB$ (kryžminiai) ir $\angle NAM = \angle NCB$ (vidaus priešiniai, $AD \parallel BC$).	1	Už pagrindimą, kad trikampiai AMN ir CBN yra panašūs.
	Todėl: $\frac{AM}{CB} = \frac{MN}{BN} = \frac{1}{6},$ $MN = \frac{1}{6} BN,$ $BN = BM - MN = BM - \frac{1}{6} BN \Rightarrow$ $\frac{7}{6} BN = BM \Rightarrow BN = \frac{6}{7} BM.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN = \frac{6}{7} BM$.
23.2		2	
	$\overrightarrow{BN} = \frac{6}{7} \overrightarrow{BM} = \frac{6}{7} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) =$	1	Už teisingai pritaikytą vektorių sudėties trikampio taisyklę.
	$= \frac{6}{7} \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} \right) = \frac{6}{7} \left(-\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \right) = -\frac{6}{7} \vec{a} + \frac{1}{7} \vec{b}.$ Ats.: $\overrightarrow{BN} = -\frac{6}{7} \vec{a} + \frac{1}{7} \vec{b}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		4	
	$kx^3 = k, \quad k > 0,$ $x^3 = 1,$ $x = 1.$	1	Už teisingai rastą grafikų susikirtimo taško abscisę.
	$\int_0^1 (k - kx^3) dx = 6,$	1	Už teisingai užrašytą apibrėžtinį integralą figūros plotui apskaičiuoti.
	$\left(kx - \frac{kx^4}{4} \right) \Big _0^1 = 6,$	1	Už teisingai surastą pirmąją funkciją.
	$k - \frac{k}{4} = 6,$ $k = 8.$ <i>Ats.: $k = 8.$</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		7	
25.1		3	
	$\pi r l = 16\pi\sqrt{3},$ $l = \frac{16\sqrt{3}}{r},$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{768}{r^2} - r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{768 - r^4},$	1	Už teisingai išreikštą h per r .
	$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{1}{r}\sqrt{768 - r^4} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{768 - r^4}.$	1	Už teisingą pagrindimą.
25.2		2	
	$V'(r) = \left(\frac{1}{3}\pi r\sqrt{768 - r^4}\right)' = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{768 - r^4} - \frac{2r^4}{\sqrt{768 - r^4}}\right) =$	1	Už teisingai gautą sudėtinės funkcijos išvestinę.
	$\frac{1}{3}\pi \frac{768 - r^4 - 2r^4}{\sqrt{768 - r^4}} = \frac{1}{3}\pi \frac{768 - 3r^4}{\sqrt{768 - r^4}}.$	1	Už gautą teisingą išvestinę.
25.3		2	
	$\frac{1}{3}\pi \frac{768 - 3r^4}{\sqrt{768 - r^4}} = 0, \quad 1 \leq r \leq 5,$ $768 - 3r^4 = 0,$ $r = 4.$	1	Už teisingai gautą kritinį tašką.
	 Ats.: $r = 4.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad kūgio tūris yra didžiausias, kai $r = 4.$

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		3	
	 I būdas Pastebėkime, kad $S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC} = S_{\triangle ABC}$. Pažymėkime $CD = k$. $\frac{1}{2}ak \sin \gamma + \frac{1}{2}bk \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \sin(2\gamma),$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pastebėjimą, kad dviejų trikampių ADC ir BDC plotų suma lygi trikampio ABC plotui) ir teisingai pritaikytą ploto formulę.
	$\frac{1}{2}ak \sin \gamma + \frac{1}{2}bk \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma,$ $ak \sin \gamma + bk \sin \gamma = 2ab \sin \gamma \cos \gamma,$	1	Už teisingai pritaikytą sinuso dvigubo kampo formulę.
	$k \sin \gamma(a + b) = 2ab \sin \gamma \cos \gamma \Rightarrow$ $k = \frac{2ab \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma(a + b)} = \frac{2ab \cos \gamma}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} \cdot \cos \gamma.$	1	Už teisingą įrodymą.
	II būdas Pažymėkime $CD = k$. Pagal kosinusų teoremą: $AD^2 = b^2 + k^2 - 2bk \cos \gamma,$ $BD^2 = a^2 + k^2 - 2ak \cos \gamma.$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (kosinusų teoremos pritaikymą trikampiams ADC ir BDC).
	Pagal trikampio pusiaukampinės savybę: $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AD^2}{BD^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$ $\frac{b^2 + k^2 - 2bk \cos \gamma}{a^2 + k^2 - 2ak \cos \gamma} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą trikampio pusiaukampinės savybę ir teisingai pertvarkytą reiškinį.
	$a^2b^2 + a^2k^2 - 2a^2bk \cos \gamma = b^2a^2 + b^2k^2 - 2b^2ak \cos \gamma,$ $a^2k^2 - b^2k^2 = 2a^2bk \cos \gamma - 2b^2ak \cos \gamma,$ $k^2(a - b)(a + b) = 2abk \cos \gamma(a - b) \Rightarrow$ $k = \frac{2ab \cos \gamma(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{2ab}{a + b} \cdot \cos \gamma.$	1	Už teisingą įrodymą.
	III būdas Pažymėkime $CD = k$. Pagal sinusų teoremą: $\frac{BD + AD}{\sin(2\gamma)} = \frac{a}{\sin \angle BAC},$ $\frac{k}{\sin \angle BAC} = \frac{AD}{\sin \gamma} \Rightarrow$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (sinusų teoremos pritaikymą trikampiams ABC ir ADC arba ABC ir BDC).

	$\sin \angle BAC = \frac{a \sin(2\gamma)}{BD + AD} = \frac{k \sin \gamma}{AD}.$ Pagal trikampio pusiaukampinės savybę: $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a \sin(2\gamma)}{\frac{AD \cdot a}{b} + AD} = \frac{k \sin \gamma}{AD} \Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą trikampio pusiaukampinės savybę ir teisingai pertvarkytą reiškinį.
	$\Rightarrow \frac{ab \sin(2\gamma)}{a + b} = k \sin \gamma \Rightarrow \frac{ab \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma}{a + b} = k \sin \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow k = \frac{2ab}{a + b} \cdot \cos \gamma.$	1	Už teisingai pritaikytą sinuso dvigubo kampo formulę ir teisingą įrodymą.