

**2023 METŲ PAGRINDINĖS SESIJOS MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS
 EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA**

I dalis

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	C	D	B	D	C	C	B	A	C	D

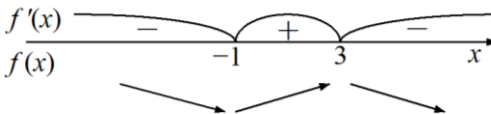
II dalis

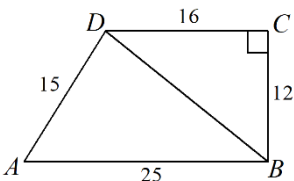
11	$S = 18$ (arba 18)
12.1	120° (arba $\frac{2\pi}{3}$)
12.2	6
13.1	$a_1 = 18$ (arba 18)
13.2	$k = 19$ (arba 19)
14.1	$x = -2$ (arba -2)
14.2	$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$ (arba $15^\circ + 60^\circ k, k \in \mathbb{Z}$)
14.3	$x = \pm\sqrt{\ln 2}$ (arba $\pm\sqrt{\ln 2}$)
15	1,5 karto (arba 1,5, arba $\frac{3}{2}$, arba $1\frac{1}{2}$)
16	$I = 1 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$ (arba 10^{-5} , arba $\frac{1}{10^5}$, arba $\frac{1}{100000}$, arba 0,00001)
17	120
18	$\left[\frac{3}{4}; 1\right]$ (arba $[0,75; 1]$, arba $0,75 \leq y \leq 1$)

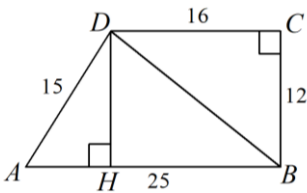
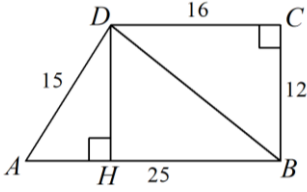
III dalis

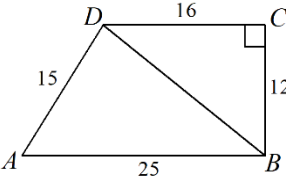
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		2	
	$640 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,85 =$	1	Už bent vieną teisingai apskaičiuotą procentinį sumažėjimą (pvz., sudarant proporciją).
	$= 323,68$ (Eur). Ats.: 323,68 Eur.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

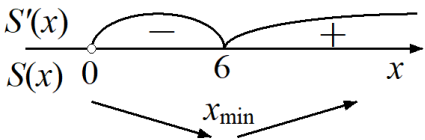
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		5	
20.1		2	
	$\begin{cases} 2 - 3x > 0, \\ 4 + x > 0; \end{cases}$	1	Už teisingai sudarytą nelygybių sistemą.
	$\begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ x > -4; \end{cases}$ $-4 < x < \frac{2}{3}.$ Ats.: $x \in \left(-4; \frac{2}{3}\right)$ (arba $-4 < x < \frac{2}{3}$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.2		3	
	$\log_{0,3}(2 - 3x) \geq \log_{0,3}(4 + x),$ $2 - 3x \leq 4 + x,$	1	Už teisingai sudarytą tiesinę nelygybę.
	$-4x \leq 2,$ $x \geq -\frac{1}{2}.$	1	Už teisingai išspręstą tiesinę nelygybę.
	$\begin{cases} x \in \left(-4; \frac{2}{3}\right), \\ x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Arba nubraižyta skaičių tiesė, pavaizduoti nelygybių sprendiniai ir pažymėta jų sankirta. Ats.: $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ (arba $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		8	
21.1		1	
	Ats.: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$.	1	Už teisingą išvestinę.
21.2		3	
	$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0$,	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (pvz., funkcijos išvestinės prilyginimą nuliui)
	$x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = -1$ arba $x = 3$.	1	Už teisingus kritinius taškus.
		1	Už gautą teisingą atsakymą.
	Ats.: $x \in (-\infty; -1), (3; +\infty)$.		
21.3		4	
	Kadangi $f'(3) = 0$, tai liestinės lygtis bus $y = f(3) \Rightarrow y = 31$.	1	Už gautą teisingą liestinės lygtį.
	I būdas $\int_0^3 (31 - (-x^3 + 3x^2 + 9x + 4)) dx =$ II būdas $31 \cdot 3 - \int_0^3 (-x^3 + 3x^2 + 9x + 4) dx =$	1	Už sudarytą teisingą apibrėžtinį integralą plotui apskaičiuoti.
	$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x \right) \Big _0^3 =$ $= 93 - \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x \right) \Big _0^3 =$	1	Už gautą teisingą pirmąją funkciją.
	$= \frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{9 \cdot 3^2}{2} + 27 \cdot 3 =$ $= 33,75$. $= 93 + \frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{9 \cdot 3^2}{2} - 4 \cdot 3 =$ $= 93 - 59,25 = 33,75$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	Ats.: 33,75.		

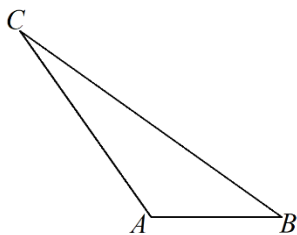
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		5	
22.1		2	
	 Pagal Pitagoro teoremą: $BD^2 = DC^2 + CB^2 = 400$, $BD = 20$.	1	Už teisingai apskaičiuotą įstrižainės BD ilgį.
	I būdas Trikampiai ABD ir BDC yra panašieji pagal tris kraštines: $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC}$, nes $k = \frac{25}{20} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12} = 1,25$. II būdas Trikampiai ABD ir BDC yra panašieji pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: $\angle ABD = \angle BDC$ (vidaus priešiniai, $DC \parallel AB$) ir $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC}$, nes $k = \frac{25}{20} = \frac{20}{16} = 1,25$. III būdas Pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą pastebime, kad trikampis ABD yra statusis: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, nes $25^2 = 15^2 + 20^2$. Todėl $\angle ADB = 90^\circ$. Trikampiai ABD ir BDC yra panašieji pagal du kampus: $\angle ADB = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle BDC$ (vidaus priešiniai, $DC \parallel AB$).	1	Už teisingą pagrindimą.
22.2		3	
	I būdas $\angle ADB = 90^\circ$, nes panašiujų trikampių ABD ir BDC atitinkami kampai yra lygūs. $\cos \angle BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \cos \angle BAD$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 225$. Ats.: 225.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $\angle ADB = 90^\circ$.
		1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
		1	Už gautą teisingą atsakymą.

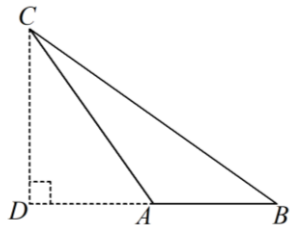
	II būdas  $AH = 25 - 16 = 9$, nes $DC = HB$.	1	Už brėžinio papildymą trapecijos aukštine DH ir teisingai apskaičiuotą atkarpos AH ilgį.
	$\cos \angle DAH = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \cos \angle DAB,$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
	$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \cos \angle DAB,$ $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 225.$ Ats.: 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	III būdas  $AH = 25 - 16 = 9$, nes $DC = HB$.	1	Už brėžinio papildymą trapecijos aukštine DH ir teisingai apskaičiuotą atkarpos AH ilgį.
	$DH = CB = 12$. Įvedame koordinačių sistemą (koordinačių pradžios taškas A), tada: $\vec{AD} = (9; 12)$, $\vec{AB} = (25; 0)$.	1	Už teisingai gautas vektorių $\vec{AD}$ ir $\vec{AB}$ koordinates.
	$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 9 \cdot 25 + 12 \cdot 0 = 225.$ Ats.: 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	IV būdas  Pagal kosinusų teoremą: $DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos \angle BAD,$ $20^2 = 15^2 + 25^2 - 2 \cdot 15 \cdot 25 \cdot \cos \angle BAD,$ $\cos \angle BAD = \frac{400 - 225 - 625}{-2 \cdot 15 \cdot 25} = \frac{3}{5}.$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \cos \angle DAB,$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 225.$ Ats.: 225.	1	Už teisingai pritaiktą kosinusų teoremą.
		1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
		1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		7	
23.1		3	
	$V = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h \Rightarrow 54 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h \Rightarrow h = \frac{216}{x^2 \sqrt{3}},$	1	Už teisingai išreikštą h per x .
	$S = S_{\text{son.}} + 2S_{\text{pagr.}} = 3 \cdot h \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4},$	1	Už teisingai sudarytą reiškinį viso paviršiaus plotui apskaičiuoti.
	$S(x) = 3 \cdot \frac{216}{x^2 \cdot \sqrt{3}} \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{216\sqrt{3}}{x}.$	1	Už teisingą pagrindimą.
23.2		2	
	$\left(\frac{x^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{216\sqrt{3}}{x} \right)' = x\sqrt{3} - \frac{216\sqrt{3}}{x^2},$	1	Už teisingai gautą išvestinę.
	$\frac{x^3 \sqrt{3} - 216\sqrt{3}}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6.$ <i>Ats.: $x = 6$.</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
23.3		2	
		1	Už teisingą pagrindimą, kad $x = 6$ yra minimumo taškas.
	Funkcija $S(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $x = 6$. $S_{\min} = S(6) = \frac{6^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{216\sqrt{3}}{6} = 18\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 54\sqrt{3},$ todėl $S(x) \geq S(6)$ su visomis $x > 0$ reikšmėmis. Taigi $S(x) \geq 54\sqrt{3}$.	1	Už teisingą pagrindimą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		4	
24.1		2	
	Įvykiui $X = 2$ yra palankios trys baigtys: $P(X = 2) = P(G \cap T \cap \bar{M}) + P(G \cap \bar{T} \cap M) + P(\bar{G} \cap T \cap M)$.	1	Už teisingai išvardytas įvykiui $X = 2$ palankias baigtis arba už teisingai apskaičiuotą bent vienos baigties tikimybę.
	Yra žinoma, kad įvykiai G , T ir M yra nepriklausomi, todėl: $P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{30}$.	1	Už teisingą pagrindimą.
24.2		2	
	$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) - P(X = 3) =$ $= 1 - \frac{1}{60} - \frac{13}{30} - \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$.	1	Už teisingai gautą p reikšmę (pvz., teisingai pritaikytos žinios apie elementariųjų įvykių tikimybių sumą).
	$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{60} + 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{13}{30} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2 \frac{13}{60}$. Ats.: $E(X) = 2 \frac{13}{60}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		3	
	 I būdas Pagal sinusų teoremą: $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC},$ $\frac{4x}{\sin \angle BAC} = \frac{3x}{\sin \angle ABC},$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$\frac{4}{\sin \angle BAC} = \frac{3}{\sin(\angle BAC - 90^\circ)},$ $\frac{4}{\sin \angle BAC} = \frac{3}{-\cos \angle BAC} \Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą redukciją arba kampų sumos (skirtumo) sinuso formulę.
	$\frac{\sin \angle BAC}{\cos \angle BAC} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}.$ Ats.: $\operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Pagal trikampio ploto formulę teisinga lygybė: $\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle BAC = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin \angle ABC,$ $3x \sin \angle BAC = 4x \sin \angle ABC,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$3 \sin \angle BAC = 4 \sin(\angle BAC - 90^\circ),$ $3 \sin \angle BAC = -4 \cos \angle BAC,$	1	Už teisingai pritaikytą redukciją.
	$\frac{\sin \angle BAC}{\cos \angle BAC} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}.$ Ats.: $\operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	III būdas  $\angle DAC = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow \angle ACD = \angle ABC,$ $\cos \angle ABC = \cos \angle ACD = \frac{CD}{3x}$ ir $\sin \angle ABC = \frac{CD}{4x},$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (šiuo atveju už brėžinio papildymą ir teisingą bent vieną $\sin \angle ABC$ arba $\cos \angle ABC$ išraišką).
	$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{\sin \angle ABC}{\cos \angle ABC} = \frac{3}{4},$	1	Už gautą teisingą $\operatorname{tg} \angle ABC$ reikšmę.
	$\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg}(90^\circ + \angle ABC) = -\operatorname{ctg} \angle ABC =$ $= -\frac{1}{\operatorname{tg} \angle ABC} = -\frac{4}{3}.$ Ats.: $\operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		4	
	I būdas Sakykime, kad pirmasis geometrinės progresijos narys lygus x , tada teisinga lygybė: $(x + xq) \cdot 0,9 = xq^2$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	$0,9x + 0,9xq = xq^2$. Kadangi $x \neq 0$, tai $q^2 - 0,9q - 0,9 = 0$, $10q^2 - 9q - 9 = 0$, $q = 1,5$ arba $q = -0,6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius q .
	$q = -0,6$ netinka, nes progresija yra didėjanti. Kai $q = 1,5$, tai teisinga nelygybė $x \cdot 1,5^2 - x \leq 19$, $x \leq 15,2$.	1	Už teisingai nustatytą x reikšmių intervalą.
	Kadangi x ir kiti progresijos nariai yra natūralieji skaičiai ir reikia rasti didžiausią galimą trečiojo nario reikšmę, perrenkame, pradėdami nuo didžiausio galimo pirmojo nario: $x = 15$, tai antrasis narys bus 22,5 (netinka); $x = 14$, tai antrasis narys bus 21, o trečiasis – 31,5 (netinka); $x = 13$, tai antrasis narys bus 19,5 (netinka); $x = 12$, tai antrasis narys bus 18, o trečiasis 27 (tinka). Ats.: 27.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $b_1, b_2, b_3 \in N; q > 1; b_3 - b_1 \leq 19$; $b_3 = 0,9(b_1 + b_2)$, $b_1q^2 = 0,9b_1 + 0,9b_1q$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	Kadangi $b_1 \neq 0$, tai $q^2 = 0,9 + 0,9q$, $q^2 - 0,9q - 0,9 = 0$, $q_{1,2} = \frac{0,9 \pm 2,1}{2} \Rightarrow q_1 = 1,5; q_2 = -0,6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius q .
	$q = -0,6$ netinka, nes progresija yra didėjanti. Tada galime perrinkti: 1; 1,5; ... (netinka); 2; 3; 4,5 (netinka); 3; 4,5; ... (netinka); 4; 6; 9 (tinka, bet tai dar ne didžiausia galima trečiojo nario reikšmė). Pastebime, kad pirmasis narys turi būti skaičiaus 4 kartotinis, todėl perrenkame	1	Už teisingai rastą bent vieną trijų natūraliųjų geometrinės progresijos narių aibę.

	8; 12; 18 (tinka, bet tai dar ne didžiausia galima trečiojo nario reikšmė); 12; 18; 27 (tinka, bet ar tai didžiausia galima trečiojo nario reikšmė?); 16; 24; 36 (netinka, nes $b_3 - b_1 = 20 > 19$).		
	$b_3 - b_1 \leq 19$, $b_1(1,5^2 - 1) \leq 19$, $b_1 \cdot 1,25 \leq 19$, $b_1 \leq 15,2$. Šią sąlygą tenkinanti didžiausia b_1 reikšmė yra 12, todėl $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė. <i>Ats.: 27.</i>	1	Už teisingą pagrindimą, kad $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė.
	III būdas $b_1, b_2, b_3 \in N; q > 1; b_3 - b_1 \leq 19$; $b_3 = 0,9(b_1 + b_2)$, $b_1 q^2 = 0,9b_1 + 0,9b_1 q$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	Kadangi $b_1 \neq 0$, tai $q^2 = 0,9 + 0,9q$, $q^2 - 0,9q - 0,9 = 0$, $q_{1,2} = \frac{0,9 \pm 2,1}{2} \Rightarrow q_1 = 1,5; q_2 = -0,6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius q .
	$b_3 - b_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \leq 19$, $b_3 \leq 34,2$.	1	Už teisingai nustatytą b_3 reikšmių intervalą.
	$b_1 = \frac{4}{9}b_3 \in N$, todėl b_3 dalus iš 9, o kadangi $b_3 \leq 34,2$, tai didžiausia galima trečiojo nario reikšmė $b_3 = 27$, $b_2 = 18, b_1 = 9$ – tinka. <i>Ats.: 27.</i>	1	Už teisingą pagrindimą, kad $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė.