NACIONALINĖ ŠVIETIMO AGENTŪRA

# 2022 METŲ MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO REZULTATŲ

# STATISTINĖ ANALIZĖ

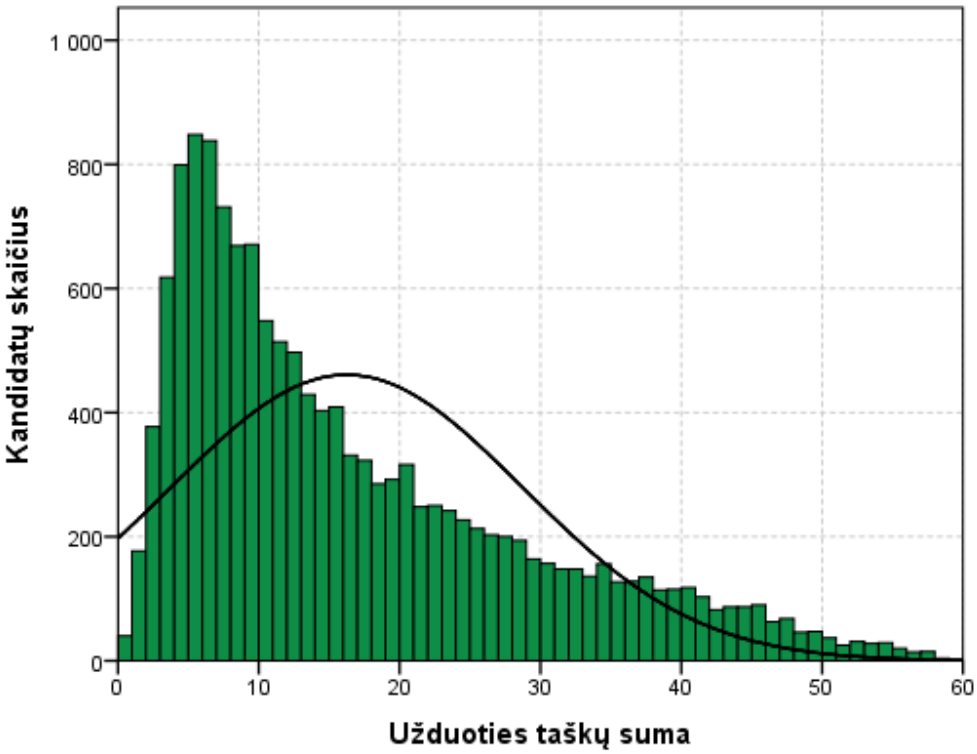
(papildyta sunkių ir labai sunkių užduočių dalykiniais komentarais bei rekomendacijomis)

2022 m. birželio 10 d. įvyko matematikos valstybinis brandos egzaminas. Jame dalyvavo ir įvertinimą gavo **14 418** kandidatų. 2022 m. birželio 30 d. įvyko pakartotinės sesijos matematikos valstybinis brandos egzaminas. Jame dalyvavo ir įvertinimą gavo 193 kandidatai.

Maksimali taškų suma, kurią galėjo surinkti laikantieji egzaminą, – 60 taškų. Minimali egzamino išlaikymo taškų sumos riba – 9 taškai. Tai sudarė 15 proc. visų galimų taškų. Matematikos valstybinio brandos egzamino neišlaikė 5 097 laikiusieji (35,4 proc.), šie kandidatai surinko nuo 0 iki 8 užduoties taškų.

Toliau pateikiama statistinė analizė yra pagrįsta 2022 m. pagrindinės sesijos matematikos valstybinį brandos egzaminą laikiusiųjų ir gavusiųjų įvertinimą rezultatais.

Matematikos valstybinio brandos egzamino kandidatų surinktų užduoties taškų vidurkis yra 16,2 taško, taškų sumos standartinis nuokrypis yra 12,5. Šiemet daugiausia iš 60 galimų taškų buvo surinkta 60 taškų. Laikiusių matematikos valstybinį brandos egzaminą kandidatų surinktų taškų pasiskirstymas pateiktas 1 diagramoje.




**1 diagrama.** Matematikos valstybinį brandos egzaminą laikiusių kandidatų surinktų taškų histograma

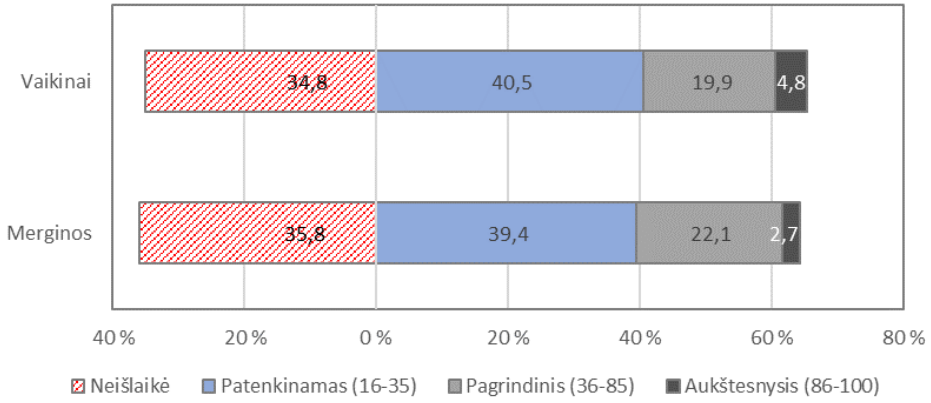
Merginos sudarė 54,1 proc. visų laikiusiųjų egzaminą. Jos vidutiniškai surinko 16,1 užduoties taško. Vaikinai vidutiniškai surinko 16,5 užduoties taško. Tarp neišlaikiusiųjų egzamino buvo 2 790 merginų ir 2 307 vaikinai, tai sudaro atitinkamai 35,8 ir 34,8 proc.

Valstybinio brandos egzamino vertinimas yra kriterinis. Minimalus išlaikyto valstybinio brandos egzamino įvertinimas yra 16 balų, maksimalus – 100 balų. Šie balai į dešimtbalės skalės pažymį nėra verčiami. Jie įrašomi į kandidato brandos atestato priedą kaip valstybinio brandos egzamino įvertinimas.

© Nacionalinė švietimo agentūra, 2022

Visi kandidatai pagal gautą įvertinimą priskiriami vienam iš trijų pasiekimų lygių – patenkinamajam, pagrindiniam ar aukštesniajam. Aukštesnįjį pasiekimų lygį pasiekė 3,6 proc. kandidatų, pagrindinį pasiekimų lygį pasiekė 21,1 proc., o patenkinamąjį – 39,9 proc. visų laikiusiųjų egzaminą.

2 diagramoje pateiktas merginų ir vaikinų pasiskirstymas pagal pasiekimų lygius. Diagramoje prie pasiekimų lygio pavadinimo nurodyta, kiek valstybino brandos egzamino balų jis atitinka.



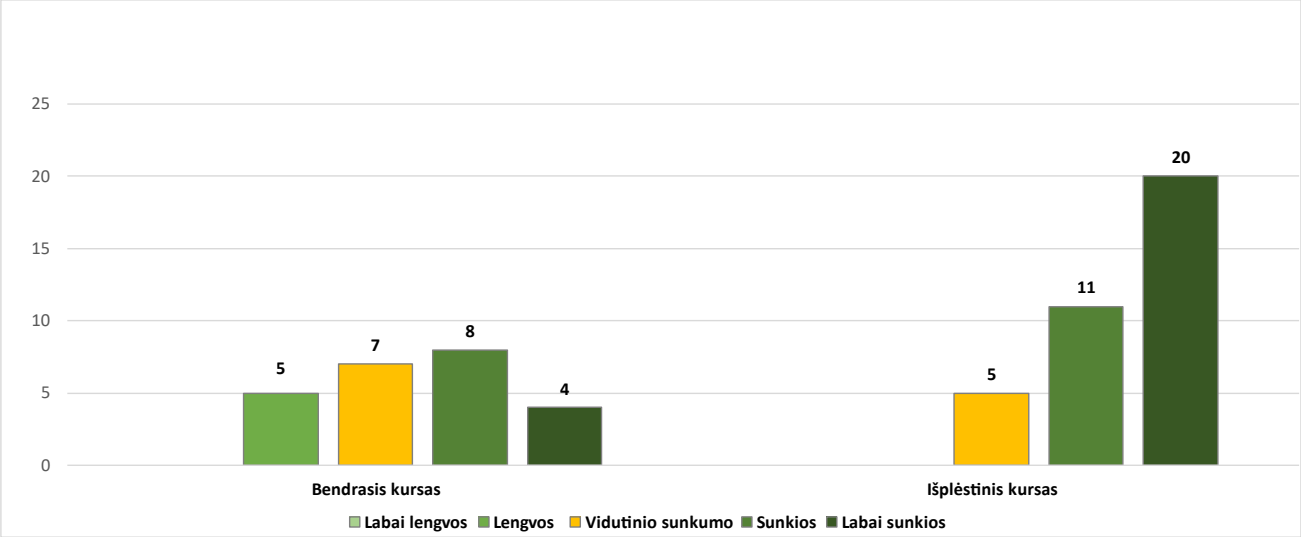

**2 diagrama.** Matematikos valstybinį brandos egzaminą laikiusių merginų ir vaikinų pasiskirstymas pagal pasiekimų lygius

1 lentelėje užduotys suskirstytos į 5 grupes pagal užduočių sunkumą, remiantis matematikos valstybinio brandos egzamino rezultatais. Šioje lentelėje pateiktos užduotys, pažymint jas skirtingomis spalvomis: – labai lengvos, – lengvos, – vidutinio sunkumo, – sunkios, – labai sunkios.

**1 lentelė.** Matematikos valstybinio egzamino užduočių sunkumas

| Užduočių sunkumas | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I d. 1 | I d. 6 | II d. 11 | II d. 15 | II d. 19.1 | III d. 21 | III d. 23.2 | III d. 25 |
| I d. 2 | I d. 7 | II d. 12 | II d. 16 | II d. 19.2 | III d. 22.1 | III d. 23.3 | III d. 26.1 |
| I d. 3 | I d. 8 | II d. 13 | II d. 17.1 | III d. 20.1 | III d. 22.2 | III d. 23.4 | III d. 26.2 |
| I d. 4 | I d. 9 | II d. 14.1 | II d. 17.2 | III d. 20.2 | III d. 22.3 | III d. 24.1 | III d. 27 |
| I d. 5 | I d. 10 | II d. 14.2 | II d. 18 | III d. 20.3 | III d. 23.1 | III d. 24.2 | |

3 diagramoje pateikta, kaip užduočių sunkumas pasiskirstęs pagal bendrąjį ir išplėstinį kursus, remiantis egzamino rezultatais. Šioje diagramoje skaičiais nurodytas maksimalus taškų skaičius, kurį galima surinkti, atlikus tam tikro lygio užduotis. Iš diagramos matyti, kad matematikos egzaminą laikiusiems kandidatams bendrojo kurso užduotys buvo įvairaus sunkumo, o dauguma išplėstinio kurso užduočių buvo sunkios ir labai sunkios. Šių metų matematikos egzaminą laikiusiems kandidatams nė viena užduotis nebuvo labai lengva.




**3 diagrama.** Užduočių sunkumas pagal kursus (pateiktas galimas surinkti taškų skaičius)

Apibendrinus informaciją, esančią kandidatų darbuose, kiekvienam užduoties klausimui (ar jo daliai, jeigu jis sudarytas iš struktūrinių dalių) buvo nustatyti toliau pateikiami parametrai.

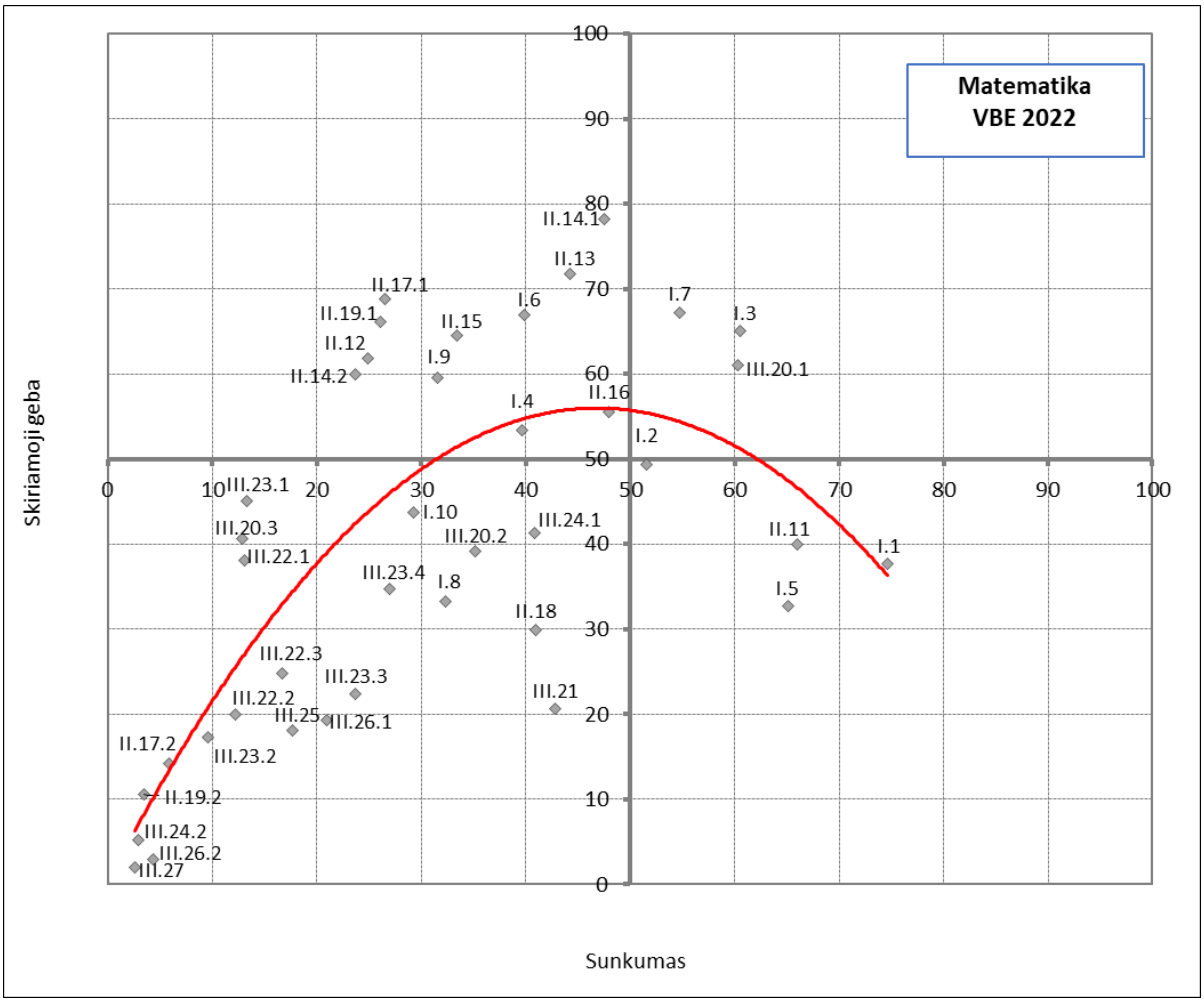
- **Kuri dalis kandidatų pasirinko atitinkamą atsakymą** (jei klausimas buvo su pasirenkamaisiais atsakymais) **ar surinko atitinkamą taškų skaičių** (0, 1, 2 ir t. t.). Lentelėse prie atsakymų pasirinkimų ar surinkto taškų skaičiaus nurodytos kandidatų procentinės dalys yra suapvalintos.
- **Klausimo sunkumas.** Šį parametrą išreiškia toks santykis:

$$\frac{\text{Visų kandidatų už šį klausimą surinktų taškų suma}}{\text{Visų už šį klausimą teoriškai galimų surinkti taškų suma}} \times 100.$$

Jeigu klausimas buvo vertinamas vienu tašku, tai jo sunkumas tiesiogiai parodo, kuri dalis kandidatų į tą klausimą atsakė teisingai.

- **Klausimo skiriamoji geba.** Šis parametras rodo, kaip atskiras egzamino klausimas išskiria stipresnius ir silpnesnius kandidatus. Jei klausimas buvo labai lengvas ir į jį beveik vienodai sėkmingai atsakė ir stipresni, ir silpnesni kandidatai, tai tokio klausimo skiriamoji geba maža. Panaši skiriamoji geba gali būti ir labai sunkaus klausimo, į kurį beveik niekas neatsakė. Neigiama skiriamosios gebos reikšmė rodo, kad silpnesnieji (sprendžiant pagal visą egzamino užduotį) už tą klausimą surinko daugiau taškų negu stipresnieji. Taigi neigiama skiriamoji geba – prasto klausimo požymis. Pagal testų teoriją vidutinio sunkumo geri klausimai būna tie, kurių skiriamoji geba yra 40–50, o labai geri – kurių skiriamoji geba yra 60 ir daugiau. Tačiau siekiant įvairių pedagoginių ir psichologinių tikslų kai kurie labai sunkūs arba labai lengvi klausimai vis tiek pateikiami teste, nors jų skiriamoji geba ir neoptimali.
- **Klausimo koreliacija su visa užduotimi.** Tai to klausimo surinktų taškų ir visų užduoties surinktų taškų koreliacijos koeficientas (apskaičiuojamas naudojant Pirsono koreliacijos koeficientą). Šis parametras rodo, kuria dalimi atskiras klausimas žinias ir gebėjimus matuoja taip, kaip ir visa užduotis. Daugiataškio klausimo koreliacija su visa užduotimi yra didesnė negu vienataškio.

Visų matematikos valstybinio brandos egzamino užduočių išsibarstymas pagal šių užduočių sunkumą ir skiriamąją gebą pavaizduotas 4 diagramoje. Joje taškeliais pavaizduotos užduotys, o raudona parabolės linija – užduotis atitinkanti regresijos kreivė.




**4 diagrama.** Matematikos valstybinio brandos egzamino užduočių sunkumo ir skiriamosios gebos išsibarstymo diagrama

Kiekviena užduotis ar jos dalis atspindi vieną iš keturių veiklos sričių, aprašytų matematikos brandos egzamino programoje, bei vieną iš trijų gebėjimų grupių.

**2 lentelė.** Atskirų užduoties veiklos sričių tarpusavio koreliacija, atskirų gebėjimų grupių tarpusavio koreliacija, koreliacija su bendra taškų suma, taip pat koreliacija su taškų suma be tos veiklos srities ir be tos gebėjimo grupės užduočių

| Veiklos sritys | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos | Geometrija | Funkcijos ir analizės pradmenys | Kombinatorika, tikimybės ir statistika | Bendra taškų suma (BTS) | BTS minus tema |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos | – | 0,806 | 0,810 | 0,628 | 0,929 | 0,850 |
| Geometrija | 0,806 | – | 0,827 | 0,630 | 0,924 | 0,863 |
| Funkcijos ir analizės pradmenys | 0,810 | 0,827 | – | 0,624 | 0,941 | 0,861 |
| Kombinatorika, tikimybės ir statistika | 0,628 | 0,630 | 0,624 | – | 0,737 | 0,669 |

| Gebėjimų grupės | Žinios ir supratimas | Matematikos taikymas | Problemų sprendimas | Bendra taškų suma (BTS) | BTS minus tema |
|---|---|---|---|---|---|
| Žinios ir supratimas | – | 0,888 | 0,500 | 0,966 | 0,878 |
| Matematikos taikymas | 0,888 | – | 0,549 | 0,969 | 0,895 |
| Problemų sprendimas | 0,500 | 0,549 | – | 0,611 | 0,539 |

# 2022 m. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIS

Šioje analizėje, pagal gautus statistinius duomenis, atskirai komentuojamos 2022 metų matematikos valstybinio brandos egzamino sunkios ir labai sunkios užduotys. Remiantis testavimo teorija ir praktika, labai sunkiomis užduotimis laikomos tos, kurių sunkumo statistinis parametras yra nuo 0 iki 19, sunkiomis laikomos tos užduotys, kurių sunkumo statistinis parametras yra nuo 20 iki 39. Išanalizavus labai sunkias ir sunkias užduotis, analizėje pateikiamos galimos sunkumo priežastys, taip pat rekomendacijos mokiniams ir mokytojams, į ką reikėtų atkreipti dėmesį ugdymo(si) procese.

Vartojami trumpiniai:

- matematikos valstybinio brandos egzamino programa – programa;
- klausimo sunkumas – sunkumas ;
- valstybinio brandos egzamino lygis – lygis;
- žinių ir supratimo gebėjimai – ŽS;
- taikymo gebėjimai – T;
- problemų sprendimo gebėjimai – PS;
- mokymosi pagal vidurinio ugdymo programą kursas – kursas;
- reikalavimai pagal bendrojo kurso programą – bendrasis;
- reikalavimai pagal išplėstinio kurso programą – išplėstinis;
- valstybinio brandos egzamino užduoties priedas **Matematikos formulės** – formulių rinkinys.

## I dalis

*Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu.*

**B➔01.** Kiek iš viso skirtingų dviženklių natūraliųjų skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, jeigu skaitmenys skaičiuje negali kartotis?

**A** 20 **B** 25 **C** 30 **D** 36

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B* | C | D | Neatsakė | | | |
| 5,5 | 74,7 | 17,1 | 2,7 | 0,1 | 74,7 | 37,6 | 0,314 |

**B➔02.** Imtį sudaro dešimt skaičių: 7; 1; 4; 3; 6; 6; 3; 3; 8; 7. Nustatykite šios imties medianą.

**A** 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C* | D | Neatsakė | | | |
| 10,1 | 4,5 | 51,5 | 33,7 | 0,1 | 51,5 | 49,3 | 0,378 |

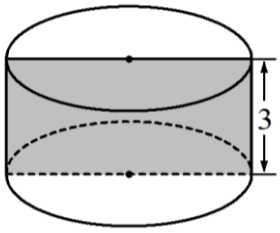
**B➔03.** Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus 18, o ritinio aukštinės ilgis lygus 3 (žr. pav.). Apskaičiuokite ritinio pagrindo plotą.

**A** $6\pi$

**B** $9\pi$

**C** $12\pi$

**D** $36\pi$




| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B* | C | D | Neatsakė | | | |
| 15,4 | 60,5 | 9,0 | 15,0 | 0,1 | 60,5 | 65,1 | 0,487 |

**B➔04.** Yra žinoma, kad $\sin\alpha = 0{,}6$ ir $90° < \alpha < 180°$. Tuomet $\cos\alpha =$

**A** $-0{,}8$ **B** $-0{,}4$ **C** $0{,}4$ **D** $0{,}8$

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A* | B | C | D | Neatsakė | | | | | | | | |
| 39,7 | 13,8 | 14,6 | 31,7 | 0,3 | 39,7 | 53,4 | 0,454 | Bendrasis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Minimalus | Ž | 1.29 [1] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti gebėjimą, atitinkantį minimalius programos reikalavimus, taikyti trigonometrinio vieneto tapatybę apskaičiuojant kampo kosinuso reikšmę, kai duota kampo sinuso reikšmė. Nors užduotis skirta visiems – ir bendruoju, ir išplėstiniu kursu besimokantiems mokiniams, ir siekiantiems tik minimalių rezultatų, vis dėlto didelė skiriamoji geba rodo, kad šią užduotį geriau sprendė stipresni mokiniai.

- Trigonometrinio vieneto formulė nepateikta formulių rinkinyje, todėl mokiniai galėjo neprisiminti šio trigonometrinio sąryšio, nors jo mokomasi jau 9–10 klasėse.
- Net 31,7 proc. mokinių rinkosi neteisingą atsakymą (**D**), tokiu būdu demonstruodami, kad neįvertina, jog reikia pateikti bukojo kampo kosinuso reikšmę, kuri gali būti tik neigiama.

[1] 1.29. Paprastais atvejais taikyti trigonometrinio vieneto tapatybę.

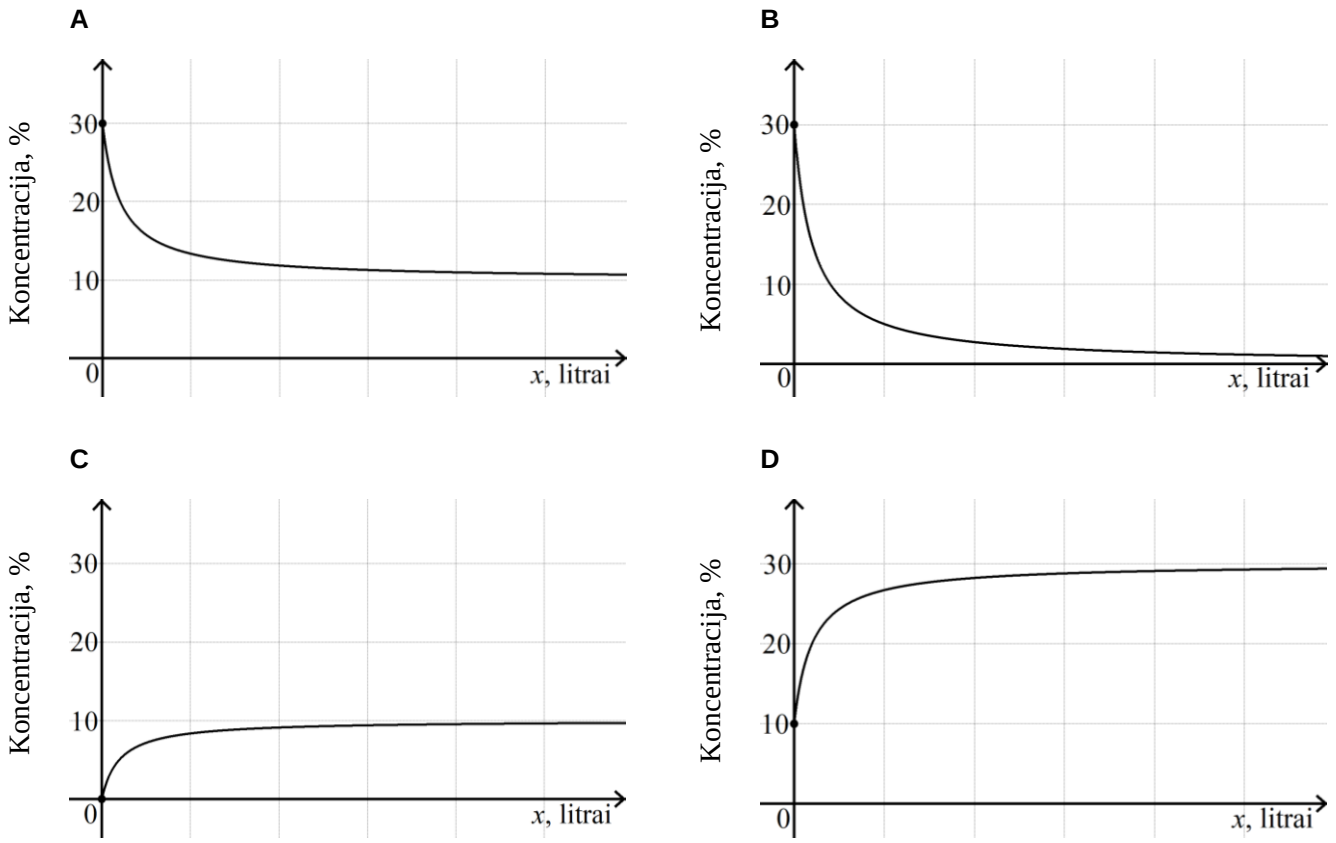
**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Nors trigonometrinio vieneto tapatybė nepateikta formulių rinkinyje ir tai gali lemti prastesnius šios užduoties sprendimo rezultatus, vis dėlto – su šia trigonometrinio vieneto tapatybe, kai duotas smailusis kampas, mokiniai susipažįsta ir pradeda ja naudotis mokydamiesi 9 ar 10 klasėse.

Vidurinėje mokykloje šias žinias praplečia mokydamiesi, kai kampas gali būti bet kokio dydžio. Todėl, sprendžiant tokio tipo užduotis, reikia atkreipti mokinių dėmesį, kokias – teigiamas ar neigiamas – reikšmes įgyja smailiojo ir bukojo kampo sinusas ir kosinusas. Mokiniai gali naudotis vienetiniu apskritimu, kuriame jie moka pavaizduoti posūkio kampą ir, atsimindami sinuso ir kosinuso apibrėžimus, nustatyti kampo sinuso ir kosinuso reikšmių ženklus. Kitas būdas, jei mokinys neprisimena trigonometrinių sąryšių reikšmių ženklų, šių žinių atgaminimui egzamino metu mokiniams galima rekomenduoti pasitelkti skaičiuotuvą, kad apskaičiuotų bet kokio konkretaus – smailiojo ar bukojo – kampo sinuso ar kosinuso reikšmę, taip galima nustatyti ir tos reikšmės ženklą.

Ugdymo procese jau nuo 11 klasės reikėtų mokinius skatinti naudotis formulių rinkiniu, kad jie, prieš laikydami egzaminą, jau žinotų, kurias formules reikia atsiminti, o kurias jie gali rasti formulių rinkinyje.

**B➔05.** Į 2 litrus 30 % koncentracijos cukraus tirpalo įpilama $x$ litrų 10 % koncentracijos cukraus tirpalo. Kuriame grafike pavaizduota gauto tirpalo koncentracijos priklausomybė nuo $x$?




| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A* | B | C | D | Neatsakė | | | |
| 65,1 | 16,1 | 6,5 | 12,2 | 0,1 | 65,1 | 32,7 | 0,258 |

**06.** Trikampio *ABC* kraštinės *BC* ilgis lygus $\sqrt{3}$, o kampo *A* didumas yra $60°$. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

**A** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** 1 **C** $\sqrt{3}$ **D** 2

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B* | C | D | Neatsakė | | | | | | | | |
| 36,5 | 39,9 | 10,0 | 13,2 | 0,4 | 39,9 | 67,0 | 0,558 | Išplėstinis | Geometrija | Pagrindinis | Ž | 2.1, 2.4 [2] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo naudotis formulių rinkinyje pateikta formule apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgiui apskaičiuoti $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, ją taikant, teisingai apskaičiuoti $\sin 60^{\circ}$, pasitelkiant skaičiuotuvą arba formulių rinkinyje pateiktą trigonometrinių reikšmių lentelę. Didelė užduoties skiriamoji geba rodo, kad užduotį, skirtą tik išplėstiniu kursu besimokantiems mokiniams, geriau sprendė stipresni mokiniai.

- Deja, bet net 36,5 proc. mokinių pasirinko neteisingą atsakymą (**A**), greičiausiai apskaičiuodami tik $\sin 60^{\circ}$. Tačiau, gali būti, kad tam tikra dalis mokinių, pasirinkę teisingą formulę apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgiui apskaičiuoti, galėjo suklysti apskaičiuodami $\sin 60^{\circ}$ (pvz. supainioti su $\cos 60^{\circ}$ reikšme, todėl pasirinkti atsakymą (**C**)) arba daryti pertvarkymo klaidas išreiškiant spindulio ilgį (pasirinktas atsakymus (**A** arba **D**)).

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Ugdymo procese jau nuo 11 klasės reikėtų mokinius skatinti naudotis formulių rinkiniu, kad jie, prieš ateidami į egzaminą, žinotų, kokias formules bei kokią dar, be formulių, informaciją gali rasti rinkinyje.

Ugdant tokio tipo geometrijos uždavinių sprendimo gebėjimus reikia ugdymo proceso metu parinkti įvairių uždavinių, kuriuos sprendžiant taikomos apie trikampį apibrėžto arba į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgio radimo formulės. Naudinga būtų parinkti tokių uždavinių, kurie sprendžiami lyginant formulių rinkinyje esančių formulių išraiškas. Tokiu būdu mokiniai įsidėmėtų formulių rinkinyje esančias formules ir išmoktų jas taikyti.

**07.** Duota funkcija $f(x) = \cos x$. Apskaičiuokite $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

**A** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[2] 2.1. Nesudėtingais atvejais taikyti liestinės savybę, įbrėžtinio ir apibrėžtinio trikampio / taisyklingojo daugiakampio savybes. 2.4. Įrodyti kosinusų teoremą, sinusų teoremą, trikampio ploto formulę S = absinγ. Remtis šių teoremų įrodymo idėjomis sprendžiant įvairius nesudėtingus uždavinius, pagrindžiant ar įrodant nesudėtingus teiginius.

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C* | D | Neatsakė | | | |
| 13,3 | 19,1 | 54,7 | 12,7 | 0,1 | 54,7 | 67,2 | 0,510 |

**08.** Suprastinkite reiškinį $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$, jeigu $a>0,\ b>0,\ a\neq b.$

**A** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **B** $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$ **C** $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$ **D** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C* | D | Neatsakė | | | | | | | | |
| 28,8 | 13,7 | 32,3 | 24,9 | 0,3 | 32,3 | 33,2 | 0,325 | Išplėstinis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Aukštesnysis | Ž | 1.9 [3] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo supaprastinti trupmeną, kurios skaitiklyje ir vardiklyje pateikti iracionalieji reiškiniai. Trupmenos skaitiklyje esantį reiškinį reikėjo išskaidyti pagal greitosios daugybos formulę $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, kurios mokomasi jau 8 klasėje, ji taikoma 9–10 klasėse, o vidurinio ugdymo programoje jos pritaikymas išplečiamas, kai reiškinyje esančių reiškinių laipsnių rodikliai gali būti ir racionalieji skaičiai.

- Gali būti, kad nemaža mokinių dalis nesuvokia, jog reiškinio $\sqrt{a}$ laipsnio rodiklis dvigubai didesnis nei reiškinio $\sqrt[4]{a}$, todėl mokiniai galėjo (pagal greitosios daugybos formulę) neteisingai skaidyti trupmenos vardiklį, o ne jos skaitiklį, tad pasirinko neteisingus atsakymus (**A** ir **D**) (juos pasirinkusiųjų daugiau nei pusė).
- Pasirinkdami neteisingą atsakymą (**B**) mokiniai galėjo klysti taikydami greitosios daugybos formulę.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Ugdymo procese reikėtų mokinius skatinti naudotis egzamino formulių rinkiniu, kad jie, prieš laikydami egzaminą, žinotų, kokias formules gali ten rasti, o kokių ne. Šiuo atveju formulių rinkinyje pateiktos tik tokios (kubo) greitosios daugybos formulės:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,\ \ a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

[3] 1.9. Nesudėtingais atvejais pertvarkyti iracionaliuosius reiškinius.

Sprendžiant 8 užduotį reikėjo atpažinti, kad joje pateiktą trupmeninį reiškinį galima supaprastinti išskaidant skaitiklį pagal greitosios daugybos formulę $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, kurią reikia atsiminti.

Ugdymo proceso metu reikia spręsti įvairius reiškinių paprastinimo uždavinius, kuriuose mokiniai turi pasirinkti, kuriam reiškiniui ir kurią iš greitosios daugybos formulių reikėtų pritaikyti.

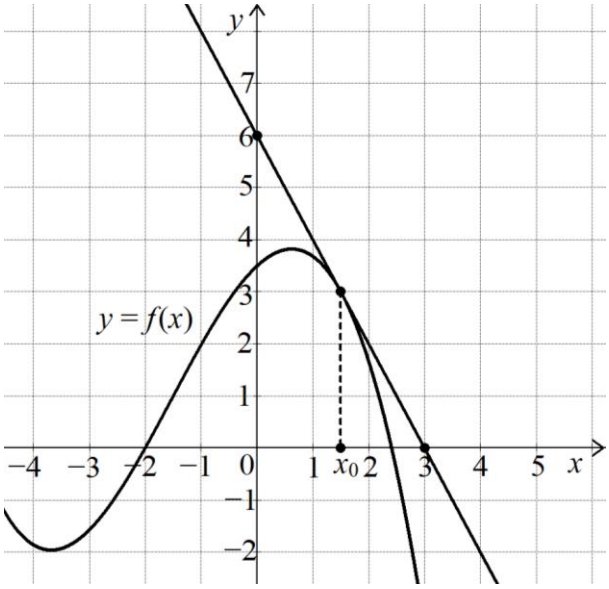
**09.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas ir šio grafiko liestinė taške, kurio abscisė yra $x_0$. Ši liestinė kerta koordinačių ašis taškuose $(0; 6)$ ir $(3; 0)$. Apskaičiuokite $f'(x_0)$.

**A** $-2$

**B** $-0{,}5$

**C** $0{,}5$

**D** $2$




| Atsakymų pasirinkimas (%) | | | | | Sunkumas | Skiriamoji geba | Koreliacija | Kursas | Veiklos sritis | Lygis | Genėjimai | Programos punktas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A* | B | C | D | Neatsakė | | | | | | | | |
| 31,6 | 13,0 | 30,4 | 24,6 | 0,5 | 31,6 | 59,6 | 0,564 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis | T | 3.14 [4] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Norėdami teisingai išspręsti šią užduotį, mokiniai turėjo pademonstruoti žinias, susijusias su funkcijos išvestinės geometrine prasme bei prisiminti, kaip skaičiuojamas tiesės (šiuo atveju funkcijos grafiko liestinės) krypties koeficientas.

- Ši užduotis mokiniams galėjo būti nelengva, nes dauguma jų įpratę (tam daugiausiai laiko skiriama ir ugdymo proceso metu) funkcijos išvestinės reikšmę apskaičiuoti, kai duota konkreti funkcijos formulė ir konkreti taško abscisė (kaip 7-toje užduotyje, kurios sunkumo rodiklis jau didesnis – 54,7 proc. mokinių pasirinko teisingą atsakymą). Sprendžiant šią užduotį, mokiniams reikėjo

[4] 3.14. Sieti funkcijos išvestinės reikšmę duotame taške su funkcijos grafiko liestinės lygties krypties koeficientu (y = kx + b, k =f'(x) = tgα, čia α – kampo tarp liestinės ir x ašies didumas) ir užrašyti funkcijos grafiko liestinės duotame taške lygtį.

prisiminti, kokia šios funkcijos išvestinės geometrinė prasmė bei nesuklysti nustatant tiesės (liestinės) krypties koeficientą, kai duotos tiesės ir koordinačių ašių susikirtimo taškų koordinatės.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokiniams, siekiantiems aukštesnių rezultatų, privalu žinoti, kad matematikos egzamine gali būti ne tik įprastų (procedūrinių) išvestinės skaičiavimo, radimo arba taikymo uždavinių, bet ir uždavinių, kuriuos sprendžiant reikia pademonstruoti teorines žinias bei gilesnį supratimą, kas yra išvestinė, kokia jos geometrinė ir fizikinė prasmė.

**10.** Yra žinoma, kad $f(x) = \cos x$ ir $g(x) = \sin x$. Kuri iš pateiktų funkcijų yra nelyginė?

**A** $h_1(x) = f(f(x))$

**B** $h_2(x) = f(g(x))$

**C** $h_3(x) = g(f(x))$

**D** $h_4(x) = g(g(x))$

| *Atsakymų pasirinkimas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D* | Neatsakė | | | | | | | | |
| 10,9 | 26,2 | 33,4 | 29,3 | 0,2 | 29,3 | 43,7 | 0,431 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis | T | 3.5 [5] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Norėdami teisingai išspręsti šią užduotį, mokiniai turėjo tinkamai pritaikyti ir susieti žinias, susijusias su trigonometrinių funkcijų lyginumu, bei išmanymą apie sudėtines funkcijas.

- Ši užduotis mokiniams galėjo būti nelengva, nes reikalauja sieti keleto dalykų suvokimą: apie dviejų trigonometrinių funkcijų sinuso ir kosinuso lyginumą bei sudėtines funkcijas ir mokėjimą apskaičiuoti jų reikšmes. Taigi, mokiniams, norintiems pademonstruoti žinias, susijusias su lyginumu, tenka pademonstruoti išmanymą bei gebėjimus, susijusius su sudėtinių funkcijų temos suvokimu, bei visa tai teisingai sieti į visumą.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokiniams, siekiantiems aukštesnių rezultatų, privalu žinoti, kad matematikos egzamine, kai kurioms užduotims, priskirtoms aukštesniajam mokinių pasiekimų lygiui, išspręsti gali prireikti pritaikyti žinias ar gebėjimus, kurie susiję ne tik su viena turinio srities tema, bet ir su keliomis skirtingomis temomis. Be to, atliekant sudėtingesnes užduotis, kartais gali prireikti susieti ne tik kelių temų, bet ir kelių skirtingų veiklos sričių išmanymą bei gebėjimus.

[5] 3.5. Iš pateiktos formulės (nesudėtingais atvejais) nustatyti apibrėžimo ir reikšmių sritis. Nustatyti formule išreikštos funkcijos lyginumą.

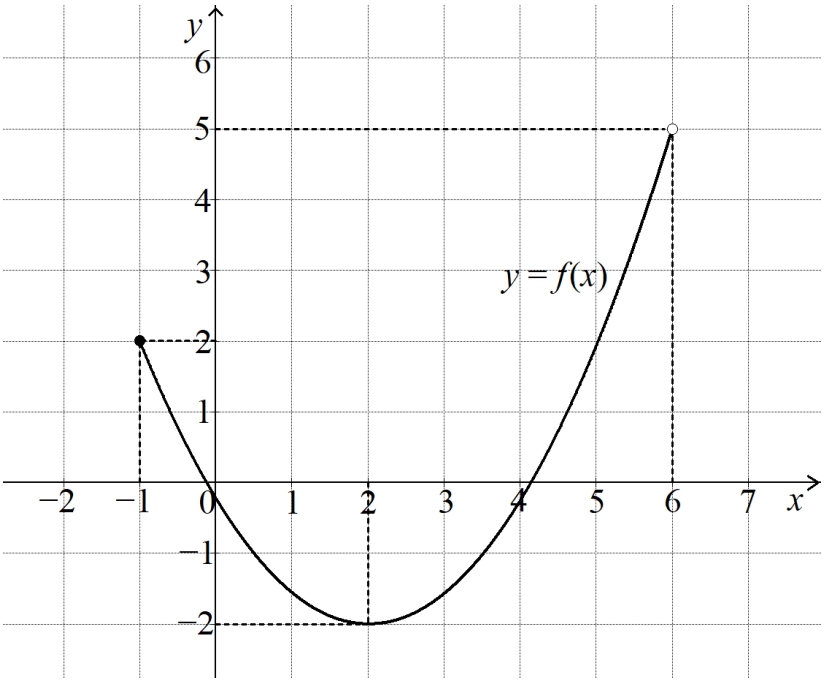
## II dalis

*Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–19) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas* ***1 tašku****. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.*

**B➔11.** Duotos dvi aibės: $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 3; 4\}$ ir $B = \{-5; -3; -1; 3; 5\}$. Kiek elementų priklauso aibių $A$ ir $B$ sankirtai $A \cap B$?

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 34,0 | 66,0 | 66,0 | 39,9 | 0,320 |

**B➔12.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Nustatykite šios funkcijos reikšmių sritį.

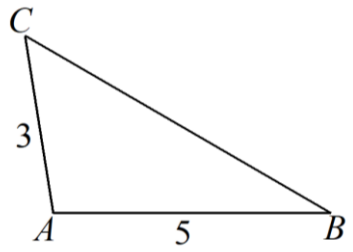



| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 75,1 | 24,9 | 24,9 | 61,8 | 0,620 | Bendrasis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Minimumas | Ž | 3.5 [6] |

[6] 3.5. Iš grafiko (eskizo) nustatyti funkcijos apibrėžimo (reikšmių) sritį, funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumo taškus, funkcijos ekstremumus ir funkcijos didžiausias (mažiausias) reikšmes nurodytame intervale.

| Galimos sunkumo priežastys |
|---|
| Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti minimalių pasiekimų lygmeniui priskirtą gebėjimą – nustatyti funkcijos reikšmių sritį, kai pateiktas šios funkcijos grafikas. Didelė šio uždavinio skiriamoji geba vėl rodo, kad minimalių pasiekimų reikalaujanti užduotis geriau sprendžiama stipresnių mokinių.<br><br>• Vis dėlto, dažniausiai mokiniai klydo pateikdami ne funkcijos reikšmių srities, bet funkcijos apibrėžimo srities intervalą – tai rodo, kad mokiniai šių dviejų sąvokų neskiria.<br>• Taip pat mokiniai neatkreipė dėmesio, kokie intervalo *galai* (intervalo pabaigos ženklai) – atviri ar uždari – turi būti.<br>• Kartais mokiniai reikšmių sritį pateikia kaip įvairių intervalų junginius (sąjungą ar sankirtą), tačiau dažnai kaip neteisingus. |
| **Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams** |
| Ugdymo procese daugiau dėmesio skirti šių dviejų – reiškinio arba funkcijos apibrėžimo ir reikšmių srities – sąvokų įtvirtinimui. Mokiniai su šiomis sąvokomis susipažįsta jau 9–10 klasėse, o vidurinėje mokykloje jas praplečia nagrinėdami įvairesnes funkcijas ir jų reikšmių kitimą. Ir bendruoju, ir išplėstiniu kursu besimokantys mokiniai vidurinėje mokykloje išmoksta taikyti funkcijos išvestinę funkcijų tyrimui, tai labai susiję ir su funkcijos reikšmių kitimo nagrinėjimu. |

**B➔13.** Duotas trikampis $ABC$. Yra žinoma, kad $AB = 5$, $AC = 3$, $\cos\angle A = -\frac{1}{15}$. Apskaičiuokite trikampio kraštinės $BC$ ilgį.




| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 55,7 | 44,3 | 44,3 | 71,7 | 0,566 |

**B➔14.** Išspręskite lygtis:

**14.1.** $\sqrt{x^2 - 16} = 3$;

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 52,5 | 47,5 | 47,5 | 78,2 | 0,602 |

**14.2.** $\cos x = -\frac{1}{2}$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 76,4 | 23,6 | 23,6 | 59,9 | 0,614 | Bendrasis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Minimumas | Ž | 1.31 [7] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti minimalių pasiekimų lygmeniui priskirtą gebėjimą – spręsti paprasčiausias trigonometrines lygtis. Atkreipiame dėmesį, kad trigonometrinių lygčių sprendinių formulės pateiktos formulių rinkinyje, todėl mokiniai turėjo pademonstruoti gebėjimą šias formules pritaikyti konkrečiai lygčiai, todėl jiems reikėjo tik teisingai apskaičiuoti $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ reikšmę, kurią, šiuo atveju, lengviausiai apskaičiuoti skaičiuotuvu.

- Taigi, dažniausiai mokiniai, pateikę neteisingą atsakymą, bet pasirinkę teisingą sprendinių formulę iš formulių rinkinio, klysta apskaičiuodami $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ reikšmę arba apskritai nesuvokia, kad ją reikia apskaičiuoti ir vietoj tos reikšmės rašo įvairius netinkamus skaičius.
- Kai kurie mokiniai nurodo tik keletą lygties sprendinių, demonstruodami nesuvokimą, kad užduoties, kurioje prašoma išspręsti lygtį, atsakyme reikia pateikti visus tos lygties sprendinius – šiuo atveju jų yra be galo daug, todėl jie užrašomi bendrąja sprendinio formule.
- Kartais mokiniai užrašo ne visą sprendinių formulę, pvz., neparašo, kad sprendinių formulėje naudojama raidė ***Z*** turi būti apibrėžta kaip sveikieji skaičiai.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Deja, bet trigonometrijos tema mūsų mokiniams jau keletą metų yra probleminė sritis. Tiek praėjusių metų, tiek šių metų rezultatai rodo, kad net paprasčiausių lygčių, kurių sprendinių formulės pateiktos formulių rinkinyje, sunkumo rodiklis nesiekia 25 proc. ir supanašėja su sudėtingesnių racionaliųjų ar iracionaliųjų lygčių sprendimo rezultatais. Spręsdami trigonometrines lygtis mokiniai gali naudotis jų sprendinių formulėmis, pateiktomis formulių rinkinyje, taip pat gali naudotis trigonometrinių reikšmių lentele arba skaičiuotuvu apskaičiuodami kampo reikšmes, bet ir šio gebėjimo dauguma jų nedemonstruoja.

**15.** Atsitiktinio dydžio $X$ skirstinys pateiktas lentele. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį.

| $m$ | $-1$ | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbf{P}(X = m)$ | 0,8 | $p$ |

[7] 1.31. Spręsti $af(x) = b$ pavidalo lygtį, kai $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 66,6 | 33,4 | 33,4 | 64,5 | 0,554 | Išplėstinis | Kombinatorika, tikimybės ir statistika | Pagrindinis | Ž | 4.3 [8] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti išplėstiniam kursui priskirtą gebėjimą apskaičiuoti atsitiktinio dydžio matematinę viltį.

- Formulė matematinei vilčiai apskaičiuoti pateikta formulių rinkinyje ir dauguma mokinių ją gebėjo pritaikyti, bet kai kurie nesuprato, kad „apskaičiuoti“ reiškia pateikti matematinės vilties skaitinę reikšmę, o ne reiškinį $-0{,}8 + p$. Mokiniai, pateikę tokį atsakymą, arba neskiria sąvokų „apskaičiuoti“ ir „užrašyti reiškiniu“, arba negeba pritaikyti žinių, kad atsitiktinio dydžio lentelėje pateiktų elementariųjų įvykių tikimybių suma turi būti lygi 1.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Ugdymo proceso metu mokiniams reikėtų pateikti uždavinių, kuriuose reikia apskaičiuoti atsitiktinio dydžio matematinę viltį arba dispersiją, kai pateiktos visos elementariųjų įvykių tikimybių reikšmės ir tokiu būdu įtvirtinti formulių taikymo įgūdžius. O po to reikėtų pateikti uždavinių, kuriuose tam tikrų duomenų šiems dydžiams apskaičiuoti trūksta ir nagrinėti, kaip juos galima rasti, kokiomis žiniomis apie atsitiktinio dydžio skirstinį galima remtis.

**16.** Kovo 1−12 d. mokiniai atliko tyrimą. Kiekvienos dienos vidurdienį jie matavo oro temperatūrą ir nustatė, kad kiekvieną dieną oro temperatūra buvo 0,5 °C aukštesnė negu prieš tai buvusią dieną. Vidutinė šių dvylikos dienų temperatūra buvo 4,75 °C. Apskaičiuokite, kokia oro temperatūra buvo kovo 1 d. vidurdienį.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 52,1 | 47,9 | 47,9 | 55,6 | 0,423 |

[8] 4.3. Sudaryti nesudėtingų atsitiktinių dydžių skirstinius (skirstinio lenteles) remiantis klasikiniu tikimybės apibrėžimu, įvykių nepriklausomumu. Apskaičiuoti atsitiktinių dydžių vidurkį (matematinę viltį), dispersiją ir, remiantis jomis, daryti išvadas.

**17.** Duoti du vektoriai: $\vec{a} = (-m; 1)$ ir $\vec{b} = (2; 1-m)$.

**17.1.** Raskite visas $m$ reikšmes, su kuriomis vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 73,4 | 26,6 | 26,6 | 68,9 | 0,666 | Išplėstinis | Geometrija | Aukštesnysis | T | 2.9 [9] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo žinoti, kad statmenų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, ir, remiantis vektorių skaliarinės sandaugos skaičiavimo formule, sudaryti paprasčiausią tiesinę lygtį $m$ reikšmei apskaičiuoti ir ją teisingai išspręsti.

- Formulės skaliarinei vektorių sandaugai apskaičiuoti (kai duotos vektorių koordinatės ir (ar) kai naudojami vektorių ilgiai ir kampo tarp jų kosinuso reikšmė) pateiktos formulių rinkinyje, tačiau mokiniams reikėjo prisiminti arba sugalvoti, kad statmenų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, o tada šias žinias bei vektorių skaliarinės sandaugos skaičiavimo įgūdžius teisingai pritaikyti.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Tokio tipo užduotys įprastos vidurinio ugdymo programoje, bet vektorių tema mokiniams vis dėlto išlieka problemine ir uždaviniai, kuriuos sprendžiant naudojamasi vektoriais, jiems sunkūs arba labai sunkūs. Sprendžiama daug su statmenais vektoriais susijusių uždavinių, todėl mokiniai turėtų prisiminti, kad jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, ir jiems reikėtų tai tik pasikartoti prieš egzaminą.

Tuo pačiu mokytojai galėtų patarti mokiniams, kad tam tikras žinias galima atgaminti – pvz., šiuo atveju vienoje iš skaliarinės sandaugos formulių naudojamas kampo tarp vektorių kosinusas, o $90^{o}$ kampo kosinusas – lygus nuliui, todėl ir vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui. Tokiu būdu mokinius skatintume mąstyti, samprotauti, atsakyti į klausimą, kodėl tai teisinga, tuo pačiu juos motyvuotume – daugumai mokinių lengviau mokytis, kai jie suvokia, kodėl tai teisinga.

[9] 2.9. Plokštumos ir erdvės vektorių išreikšti koordinatėmis, apskaičiuoti vektoriaus ilgį. Atlikti veiksmus: padauginti vektorių iš skaičiaus, sudėti vektorius, apskaičiuoti ir taikyti vektorių skaliarinę sandaugą. Taikyti vektorių kolinearumo ir statmenumo sąlygas, vektorių veiksmų savybes sprendžiant uždavinius.

**17.2.** Raskite visas *m* reikšmes, su kuriomis vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra vienakrypčiai.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 94,1 | 5,9 | 5,9 | 14,2 | 0,319 | Išplėstinis | Geometrija | Aukštesnysis, šimtukui | T | 2.9 [10] |

**Galimos sunkumo priežastys**

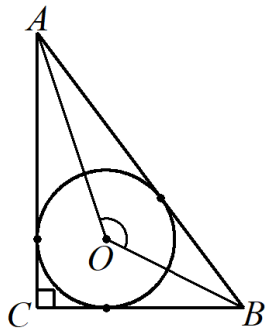
Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti tikrai puikias žinias ir labai puikius gebėjimus, susijusius su vektorių tema: žinoti, kad kolinearių vektorių, kurie apima ir vienakrypčius, ir priešpriešinius vektorius, atitinkamos koordinatės proporcingos, sudaryti kvadratinę lygtį *m* reikšmei apskaičiuoti, teisingai tą lygtį išspręsti bei atmesti netinkamą sprendinį.

- Uždavinys sunkus ir aukštesnįjį lygį pasiekusiems mokiniams: iš jų pateiktų atsakymų galima nuspėti, kad daugelis mokinių, pasirinkusių teisingą uždavinio sprendimo strategiją, vis dėlto klydo paskutiniame žingsnyje – neatmetė kvadratinės lygties vieno sprendinio iš dviejų, nemokėjo atrinkti *m* reikšmės, su kuria kolinearūs vektoriai tampa vienakrypčiais.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Ugdymo proceso metu reikėtų atkreipti dėmesį, kad kolinearūs vektoriai skirstomi į vienakrypčius ir priešpriešinius, mokyti juos atskirti, taip pat atkreipti dėmesį, kaip šios sąvokos susijusios su priešingų ir lygių vektorių sąvokomis.

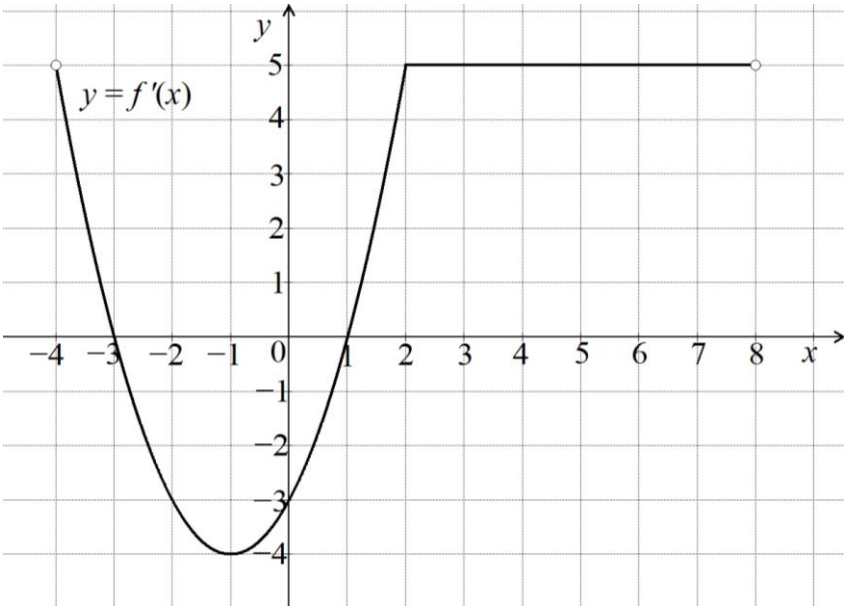
**18.** Į statųjį trikampį *ABC* įbrėžtas apskritimas, kurio centras yra taškas *O* (žr. pav.). Apskaičiuokite pažymėto kampo *AOB* didumą.




| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 59,0 | 41,0 | 41,0 | 29,8 | 0,224 |

[10] 2.9. Plokštumos ir erdvės vektorių išreikšti koordinatėmis, apskaičiuoti vektoriaus ilgį. Atlikti veiksmus: padauginti vektorių iš skaičiaus, sudėti vektorius, apskaičiuoti ir taikyti vektorių skaliarinę sandaugą. Taikyti vektorių kolinearumo ir statmenumo sąlygas, vektorių veiksmų savybes sprendžiant uždavinius.

**19.** Funkcija $f(x)$ ir jos išvestinė $f'(x)$ apibrėžtos intervale $(-4; 8)$. Paveiksle pavaizduotas $y = f'(x)$ grafikas $Ox$ ašį kerta taškuose $(-3; 0)$ ir $(1; 0)$.




**19.1.** Nustatykite $x$ reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x)$ reikšmės mažėja.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 73,9 | 26,1 | 26,1 | 66,2 | 0,662 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis | Ž | 3.12 [11] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai turėjo pademonstruoti žinias, susijusias su funkcijos išvestinės taikymu tiriant funkcijas (jų kritiniams taškams, didėjimo (mažėjimo) intervalams, ekstremumo (minimumo, maksimumo) taškams nustatyti), kurių įgyja mokydamiesi ir bendrojo, ir išplėstinio kurso. Aukštesniajam lygiui priskiriamos žinios, kurias mokiniai demonstruoja taikydami išvestinę, ne tik kai funkcija pateikta formule, bet ir kai pateiktas funkcijos arba jos **išvestinės** grafikas.

- Deja, dauguma mokinių pateikė neteisingą funkcijos reikšmių mažėjimo intervalą, su įvairiais tų intervalų pabaigos ženklais, kuris buvo funkcijos **išvestinės**, o ne pačios funkcijos, reikšmių mažėjimo intervalas (pvz. $(-4;\ -1)$ arba $x \in (-4; -1]$). Tai rodo, kad mokiniai neatidžiai perskaitė užduoties sąlygą, neužfiksavo, kad pateiktas funkcijos **išvestinės** grafikas, arba, negebėdami teisingai atlikti tokios užduoties, tiesiog pabandė pateikti atsakymą, kuris jiems atrodė logiškas.

[11] 3.12. Tirti funkcijas, išreikštas ne aukštesnio kaip ketvirtojo laipsnio daugianariais. Iš pateiktų grafikų eskizų atrinkti duotosios (tiriamosios) funkcijos grafiko eskizą. Sieti funkcijos grafiką (eskizą) su jos išvestinės grafiku.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Aukštesnių rezultatų siekiantiems mokiniams reikėtų pateikti daugiau tokio tipo uždavinių, kuriuos spręsdami jie turėtų sieti funkcijų ir tų funkcijų grafikų išvestines, taip pat galėtų savarankiškai nubrėžti funkcijos grafiką, kai duotas funkcijos išvestinės grafikas arba atvirkščiai. Galima pateikti ir įdomesnių bei nestandartinių grafikų ir tokiu būdu praplėsti mokinių žinojimą apie išvestinę bei pratinti samprotauti.

**19.2.** Apskaičiuokite $f(5)$, jei $f(6) = 6$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 96,6 | 3,4 | 3,4 | 10,5 | 0,358 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis, šimtukui | P. S. | 3.18, 3.9 [12] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Ši užduotis skirta mokiniams, siekiantiems pačių aukščiausių įvertinimų, tikrinanti mokinių problemų sprendimo gebėjimus (t. y. gebėjimą nagrinėti nestandartinę, neįprastą situaciją). Šioje užduotyje mokiniui pirmiausiai reikėjo suvokti, kad reikia surasti pirmykštę funkciją, nes užduotyje pateiktas išvestinės grafikas. Taip pat reikėjo suvokti, kad reikia pirmykštės funkcijos tik tos jos dalies, kurioje $x \in (2; 8)$. Užduočiai išspręsti pakako atlikti elementarias pirmykštės funkcijos radimo ir skaičiavimo procedūras, tačiau sprendimo idėjos mokiniams nebuvo lengvai atpažįstamos.

- Užduotis labai sunki ir aukštesnįjį lygį pasiekusiems mokiniams. Jų atsakymuose dažniausiai pasitaikantis neteisingas atsakymas – $f(5) = 6$, matyt, neteisingai mąstant, kad funkcijos reikšmė nekinta, nors, pagal užduoties sąlygą, pastovi yra funkcijos **išvestinės** reikšmė, o ne pačios funkcijos reikšmė.
- Patenkinamą arba pagrindinį lygį pasiekę mokiniai dažniausiai pateikia neteisingą atsakymą $f(5) = 5$, matyt dėl to, jog *pasidavė* skaičių žaismui – jei $f(6) = 6$, tai ir $f(5) = 5$.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Atkreipiamas dėmesys, kad stipresniems, geriau dalyką išmanantiems mokiniams ši užduotis išsprendžiama tik keliais paprastais žingsniais, kurie remiasi funkcijos išvestinės, kaip parodančios funkcijos reikšmės pokyčio greitį tam tikrame taške, samprata. Šioje užduotyje funkcijos išvestinės reikšmė bet kuriame taške iš intervalo $x \in (2; 8)$ – pastovi ir lygi 5. Tai reiškia, kad jei $x$ padidėja vienu vienetu, tai $y$ reikšmė padidėja penkiais vienetais (t. y. jei $\Delta x = 1$, tai $\Delta y = 5$), o jei $x$ sumažėja vienu vienetu, tai $y$ sumažėja penkiais vienetais, todėl $f(5) = 6 - 5 = 1$, nes $\Delta x = 5 - 6 = -1$.

Besidomintiems matematika toks aiškinimas būtų naudingas ir pakartojant pagrindines matematines sąvokas, gilinant tų sąvokų supratimą.

[12] 3.18. Taikyti funkcijų, išreikštų daugianariais, pirmykščių funkcijų radimo taisykles. 3.9. Apskaičiuoti tolydžiosios funkcijos reikšmių pokytį duotame taške, kai žinomas argumento pokytis.

## III dalis

*Išspręskite 20–27 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.*

**20.** Kiekvienas sekos narys, pradedant nuo antrojo, gaunamas prieš tai buvusį narį sumažinus 20 %. Yra žinoma, kad šeštasis šios sekos narys lygus 1024.

**B➔20.1.** Apskaičiuokite septintąjį šios sekos narį.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 39,7 | 60,3 | 60,3 | 61,0 | 0,445 |

**20.2.** Ši seka yra nykstamoji geometrinė progresija. Apskaičiuokite visų šios sekos narių sumą.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 58,5 | 12,7 | 28,8 | 35,1 | 39,1 | 0,726 | Išplėstinis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Pagrindinis | Ž | 1.4 [13] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Formulių rinkinyje pateikta nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulė, todėl, sprendžiant šią užduotį, mokiniams reikėjo ją teisingai pritaikyti. Tam jiems reikėjo teisingai atlikti du žingsnius: rasti pirmąjį geometrinės progresijos narį ir apskaičiuoti reikiamą sumą.

- Viena iš mokinių daromų klaidų – neteisingai apskaičiuotas pirmasis geometrinės progresijos narys.
- Kita, tipinė klaida, dažniausiai daroma patenkinamą lygį pasiekusių mokinių, – neteisingai apskaičiuota geometrinės progresijos vardiklio reikšmė – vietoj $q = 0{,}8$ pasirenkama $q = 0{,}2$.
- Kai kurie mokiniai neskiria, kurią formulę iš pateikto formulių rinkinio turi pasirinkti: neteisingai pasirenka ir pritaiko baigtinės geometrinės progresijos pirmųjų $n$ narių sumos formulę, vietoje nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulės.

[13] 1.4. Paprastais atvejais taikyti be galo mažėjančios geometrinės progresijos narių sumos formulę. Pakeisti dešimtainę periodinę trupmeną paprastąja, ir atvirkščiai.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Aritmetinės bei geometrinės progresijų tema nagrinėjama mokantis bendrojo ir išplėstinio kurso. Besimokantieji išplėstinio kurso, skirtingai nuo bendrojo, plečia patyrimą ir žinojimą ne tik apie paprastą, bet ir apie begalinę nykstamąją geometrinę progresiją bei jos narių sumą, kurią galimą apskaičiuoti kaip tam tikrą ribą, prie kurios artėja nykstamosios geometrinės progresijos suma, kai jos narių skaičius artėja link begalybės.

Nors nykstamosios geometrinės progresijos ir begalybės sąvokos mokiniams nėra lengvai suprantamos, tačiau šiame uždavinyje reikia tik pritaikyti formulių rinkinyje esančią formulę, t. y. uždavinys nereikalauja gilaus šių matematinių objektų suvokimo. Tad rekomenduojama, dirbant su 11 ir 12 klasių mokiniais, nuolat skatinti juos naudotis formulių rinkiniu.

**20.3.** Šios sekos nariai, kurių numeriai yra nelyginiai, sudaro naują nykstamąją geometrinę progresiją.

Apskaičiuokite visų naujosios progresijos narių sumą.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 87,1 | 12,9 | 12,9 | 40,7 | 0,601 | Išplėstinis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Aukštesnysis | T | 1.4 [14] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Aukštesnįjį lygį pasiekę mokiniai šį uždavinį sprendė greitai, paprastai ir racionaliai – jie greitai suvokė, kad taikant geometrinės progresijos narius, kurių numeriai nelyginiai, jos vardiklis pasikeičia iš 0,8 į $0{,}8^2$, o pirmasis narys lieka toks pat. Tačiau labai mažas sunkumo rodiklis rodo, kad daugumai mokinių atlikti šią užduotį buvo labai sunku.

- Kai kurie mokiniai darė loginę klaidą: klydo manydami, kad jei imamas kas antras geometrinės progresijos narys, imant narius, kurių numeriai nelyginiai, jų suma – dvigubai mažesnė. Bet sekos nariai – nelygūs skaičiai, kad galėtume daryti tokią išvadą, be to, suma – begalinė.
- Dalis mokinių painiojo sąvokas: nelyginiai numeriai ar nelyginiai skaičiai, kaip progresijos nariai.
- Kita mokinių dalis įdėjo daug darbo spręsdama šią užduotį, bet visiškai nesuvokdami, ką ir kaip reikėtų skaičiuoti, kita dalis, kaip ir 20.2 užduoties atveju, taikė netinkamą baigtinės geometrinės progresijos pirmųjų *n* narių sumos formulę.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokiniams, siekiantiems aukštesnių rezultatų, reikėtų spręsti daugiau uždavinių, kuriuos sprendžiant yra daugiau nestandartinių situacijų ar nestandartinių uždavinių formuluočių. Ugdymo proceso metu jų žinios ir gebėjimai turėtų būti plečiami, pasitelkiant įvairesnes situacijas, kurias mokiniai taip pat gali pasiūlyti:

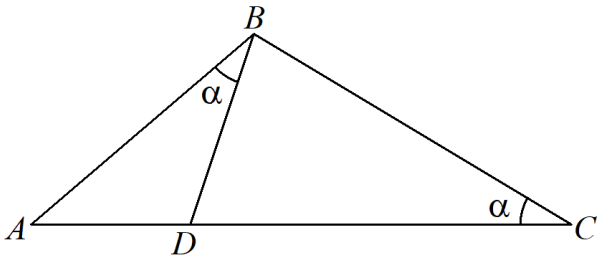
[14] 1.4. Paprastais atvejais taikyti be galo mažėjančios geometrinės progresijos narių sumos formulę. Pakeisti dešimtainę periodinę trupmeną paprastąja, ir atvirkščiai.

| |
|---|
| įvertinti, kas būtų, jei būtų kažkas kitaip – tokiu būdu skatinamas mokinių kūrybiškumas, jie motyvuojami mąstyti. Mokiniai galėtų modeliuoti situacijas pagal asmeninę patirtį bei gebėjimus. |

**B➔21.** Išspręskite lygtį $\log_3(4-x)+\log_3(22-x)=5$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 39,7 | 14,8 | 8,1 | 9,1 | 28,3 | 42,9 | 20,7 | 0,772 |

**22.** Duotas trikampis *ABC*. Jo kraštinėje *AC* pasirinktas taškas *D* taip, kad $AD:DC=1:3$. Kraštinės *AB* ilgis lygus 10, o $\angle ABD=\angle ACB=\alpha$ (žr. pav.).




**B➔22.1.** Įrodykite, kad $\Delta ABC$ ir $\Delta ADB$ yra panašieji trikampiai.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 87,0 | 13,0 | 13,0 | 38,1 | 0,564 | Bendrasis | Geometrija | Patenkinamas | T | 2.2 [15] |

| **Galimos sunkumo priežastys** |
|---|
| Visiems mokiniams labai sunkiai sekėsi spręsti šią (pagrindinės mokyklos kursą apimančią) užduotį: mokiniai su trikampių panašumo požymiais susipažįsta jau 9 ir 10 klasėse, tada jie sprendžia ir trikampių panašumo įrodymo uždavinius. 11–12 klasėse ši tema kartojama ir plečiama sprendžiant įvairesnius, |

[15] 2.2. Paprastais atvejais pagrįsti trikampių lygumą ir panašumą.

sudėtingesnius uždavinius, mokiniai taiko panašumo sąvoką pagrįsdami ir (ar) įrodydami nesudėtingus teiginius. Tačiau, tik 13,0 proc. laikiusiųjų egzaminą, sugebėjo teisingai užrašyti trikampių panašumo pagrindimą.

- Dažnai mokiniai arba apskritai nežino, kokį panašumo požymį pagrindimui gali naudoti (rašė kažkurį žinomą, bet netinkamą) arba painiojo trikampių panašumo ir lygumo požymius, arba, apskritai, rašė, ką žino iš geometrijos (pvz., kai kurie sugebėjo įžvelgti ir trijų statmenų teoremą, nors tai yra plokštumos figūrų uždavinys).
- Taip pat stebina ir labai netikslus egzaminą laikiusiųjų mokinių komunikavimas, neteisingų kampų pavadinimų naudojimas, geometrinių sąvokų nežinojimas.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Jau ne pirmus metus problematiškiausia veiklos sritimi išlieka geometrija (plokštumos geometrija, erdvės geometrija, vektorių tema) – iš esmės – žinių, jų taikymo ar problemų sprendimo uždavinys, susijęs su geometrijos sritimi – mokinių rezultatai labai žemi. Ši užduotis tai ir iliustruoja.
Nepaisant to, kad ši užduotis nėra nestandartinė ar sudėtinga, mokiniai negebėjo pateikti teisingo ir tikslaus trikampių panašumo įrodymo.

Labai svarbu, kad mokytojai, mokydami įrodyti trikampių panašumą, pabrėžtų, jog nepakanka parašyti tik tinkamą trikampių panašumo požymį, reikia parodyti, kad jis tikrai tinka pateiktai situacijai (šiuo atveju būtinai reikia įvardyti dvi lygių kampų poras).

**B➔22.2.** Apskaičiuokite trikampio *ABC* kraštinės *AC* ilgį.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 86,3 | 2,9 | 10,8 | 12,3 | 20,0 | 0,640 | Bendrasis | Geometrija | Patenkinamas | T | 2.2 [16] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Atlikdami šią užduotį mokiniai vėl turėjo pademonstruoti gebėjimą, kurį įgyja jau 9 ar 10 klasėse – pritaikyti panašiųjų trikampių savybes nežinomiems trikampių elementams rasti. Ir vėl, labai žemas sunkumo rodiklis rodo, kad mokiniams sunkiai sekėsi tai atlikti.

- Labai dažnai mokiniai, teisingai sudarę panašiųjų trikampių proporcingų kraštinių lygybę, vis dėlto neteisingai panaudojo duotą atkarpų santykį, todėl prarado vieną tašką.
- Svarbu pažymėti, kad mokiniai rašė ir neteisingai naudojo viską, ką žino iš geometrijos (pvz.: Pitagoro teoremą, sinusų teoremą skirtingų trikampių kraštinėms ir kampams susieti, kraštinės prieš $30^{o}$ kampą savybę ir t. t.), tokiu būdu sugaišo daug laiko ir prarado taškų.

[16] 2.2. Paprastais atvejais pagrįsti trikampių lygumą ir panašumą.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Ir vėl, mokymosi proceso metu įprasta užduotis tampa iššūkiu mokiniams. 22 užduoties struktūravimas turėjo būti pagalba – net neįrodžius, kad trikampiai panašūs 22.1 užduotyje, mokiniai vis vien galėjo spręsti 22.2 užduotį, naudodamiesi faktu apie trikampių panašumą. Todėl, mokant matematikos, reikia kuo dažniau mokiniams pateikti struktūruotų užduočių, kuriose yra kelios dalys ir parodyti, kaip vienos užduoties dalies rezultatas gali padėti išspręsti kitą užduoties dalį, kaip vienos užduoties dalies turinys gali pasufleruoti kitos užduoties dalies sprendimo strategiją.

**22.3.** Pažymėję $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, išreikškite vektorių $\overrightarrow{BD}$ vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 78,0 | 10,5 | 11,5 | 16,7 | 24,8 | 0,697 | Išplėstinis | Geometrija | Pagrindinis | Ž | 2.8 [17] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Ir vėl labai sunki užduotis mokiniams, susijusi su vektorių tema, kurią sprendžiant teko pademonstruoti, kaip jie geba taikyti trikampio taisyklę vektorių sudėčiai. 2021 metų matematikos valstybinio brandos egzamino (VBE) panašios 13.2 užduoties rezultatai – šiek tiek geresni – teisingą atsakymą pateikė 27,1 proc. mokinių.

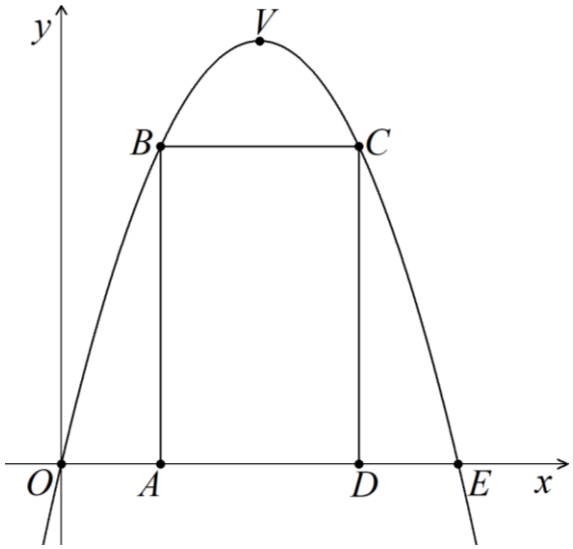
- Dažnai mokiniai nemokėjo trikampio taisyklės, painiojo vektorių kryptį, nežinojo, kurie vektoriai lygūs arba palygino netinkamus vektorius.
- Kai kurie mokiniai, teisingai pritaikę trikampio taisyklę, vis dėlto suklydo naudodamiesi sąlygoje duotu atkarpų santykiu.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokant vektorių rekomenduojama daug dėmesio skirti ne tik paprasčiausiam vektorių algebros taikymui, mokinius reikėtų mokyti pastebėti, kaip vieną objektą galima išreikšti kitu. Svarbu paminėti, kad, sprendžiant uždavinius su vektoriais, reikia nuolat kartoti(s) geometrijos figūrų savybes, geometrijos formules bei taisykles.

[17] 2.8. Paprastais atvejais taikyti trikampio (lygiagretainio) taisykles vektorių sudėčiai, vektorių kolinearumo sąlygą (daugybą iš nelygaus nuliui skaičiaus) sprendžiant įvairius uždavinius.

**23.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas – parabolė, kurios viršūnė yra taškas $V(3; 9)$. Ši parabolė kerta abscisių ašį taškuose $O(0; 0)$ ir $E(6; 0)$. Taip pat pavaizduotas stačiakampis *ABCD*. Dvi šio stačiakampio viršūnės – *A* ir *D* – priklauso abscisių ašies atkarpai *OE*, o kitos dvi viršūnės – *B* ir *C* – priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui (žr. pav.).




**B➔23.1.** Parodykite, kad funkcijos $y = f(x)$ formulė yra $f(x) = 6x - x^2$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 86,7 | 13,3 | 13,3 | 45,1 | 0,649 | Bendrasis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Patenkinamas | Ž | 3.8 [18] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Ši bendrojo kurso užduotis ir vėl nenauja vidurinio ugdymo programoje, su parabole ir kvadratinės funkcijos formule mokiniai jau susiduria ir 9–10 klasėse. Tačiau dažniausiai mokiniai nesuprato, ką reiškia parodyti, kad funkcijos formulė – duotoji, nesuprato, kaip teisingai atlikti veiksmų seką.

- Dažniausiai mokiniai klydo, manydami, kad pakanka patikrinti tik vieną iš duotųjų taškų, ir jei šis tinka kvadratinės funkcijos formulei, galima daryti išvadą, kad tai tikrai paveiksle pateiktos kvadratinės funkcijos grafiko – parabolės – formulė.
- Taip pat dažna mokinių prarastų taškų priežastis ta, kad jie, teisingai pasirinkę vieną iš trijų kvadratinės funkcijos formulės variantų (su parabolės viršūnės koordinate, skaidytą tiesiniais daugikliais ar įprastą $f(x) = ax^2 + bx + c$), neargumentuoja, kodėl $a = -1$.

[18] 3.8. Nesudėtingais atvejais remtis funkcijos savybėmis, sprendžiant praktinio ir matematinio turinio uždavinius.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokymo proceso metu daugiau dėmesio skirti uždaviniams, kuriuos sprendžiant reikia sudaryti įvairių funkcijų, apibrėžtų programoje, formules; analizuoti, kaip įsitikinti, kad pateiktoji formulė – grafike pavaizduotos funkcijos formulė, kokius ir kiek duomenų reikia patikrinti, kokią veiksmų seką reikia atlikti.

Nagrinėjant kvadratinės funkcijos formulę, atkreipti dėmesį į tris dažniausiai naudojamas šios formulės formas, aptarti, kokioje situacijoje ir kokią formą patogiau pritaikyti.

**23.2.** Atkarpos $OA$ ilgį pažymėkime $a$; čia $a \in (0; 3)$. Pagrįskite, kad stačiakampio $ABCD$ plotas apskaičiuojamas pagal formulę $S(a) = 2a^3 - 18a^2 + 36a$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 88,7 | 3,3 | 8,0 | 9,6 | 17,3 | 0,671 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Pagrindinis | T | 3.8 [19] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Dvyliktoje klasėje mokiniai jau sprendžia daug optimizavimo uždavinių, taikydami funkcijos išvestinę. Bet dažniausia problema, su kuria susiduria mokiniai spręsdami optimizavimo uždavinius, ne išvestinės taikymas, o gebėjimas, naudojantis pateiktais duomenimis, sudaryti tą funkciją, kurios didžiausią (mažiausią) reikšmę reikia nustatyti. Šios užduoties sprendimo rezultatas taip pat rodo, kad tik apie 10 proc. dvyliktokų geba tai atlikti.

- Aukštesnįjį lygį pasiekusiems mokiniams ši užduotis nebuvo tokia sunki, ir jie gebėjo pateikti gan aiškų, sklandų ir teisingą stačiakampio ploto formulės sudarymo pagrindimą. Tačiau kitiems mokiniams nepavyko to atlikti: arba jie apskritai nesprendė šio uždavinio, arba, demonstruodami nesupratimą, ką reikia daryti, tiesiog prilygino duotą reiškinį nuliui ir sprendė gautą lygtį, todėl sugaišo daug laiko ir prarado taškų.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Peršasi išvada, kad mokiniai nesuvokia, ką reikia daryti, jei jų prašoma parodyti, kad matematinis objektas, šiuo atveju formulė plotui apskaičiuoti ir 23.1 užduoties atveju funkcijos formulė, – teisingas ir tinkamas. Todėl ugdymo procese reikėtų daugiau dėmesio skirti tokio tipo užduotims spręsti. Be to, sudaryti figūros, kurios tam tikros viršūnės priklauso funkcijos grafikui, perimetro ar ploto fourmulę galima mokyti jau 9–10 klasėse, tuomet mokiniams būtų lengviau dvyliktoje klasėje sprendžiant optimizavimo uždavinius.

[19] 3.8. Remtis funkcijos savybėmis, sprendžiant praktinio ir matematinio turinio uždavinius.

**B➔23.3.** Su kuria $a$ reikšme stačiakampio $ABCD$ plotas $S(a)$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $a \in (0; 3)$?

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | |
| 67,7 | 5,6 | 14,7 | 12,0 | 23,7 | 22,4 | 0,793 | Bendrasis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Patenkinamas | T | 3.17 [20] |

| **Galimos sunkumo priežastys** |
|---|
| Įprasta, kad bendruoju ir išplėstiniu kursu besimokantiems mokiniams, laikantiems šį egzaminą, optimizavimo užduotį atlikti vis dėlto buvo sudėtinga. Mokiniai surinko tik vos ketvirtadalį visų galimų taškų.<br>• Deja, bet labai didelis skaičius mokinių, pasiekusių patenkinamą arba pagrindinį pasiekimų lygį, rinkosi iš esmės neteisingą šio uždavinio sprendimo strategiją: mokiniai tiesiog perrenka stačiakampio ploto reikšmes su tam tikromis natūraliosiomis $a$ reikšmėmis, tokiu būdu nustatydami, kad didžiausias plotas yra, kai $a = 1$.<br>• Kita dalis mokinių, pasirinkusių teisingą sprendimo strategiją (taikė išvestinę), dažniausiai klysta paskutiniame sprendimo žingsnyje argumentuodami, kodėl su jų gauta $a$ reikšme plotas įgyja didžiausią reikšmę, arba apskritai nepateikia argumentų. |
| **Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams** |
| 9–10 klasėse mokiniai jau sprendžia uždavinius, kuriuose reikia nustatyti kvadratinės funkcijos didžiausią (mažiausią) reikšmę, remiantis šios funkcijos savybėmis. 11–12 klasėse visi mokiniai, kurie matematikos mokosi bendruoju ir išplėstiniu kursais, susipažįsta su universaliu būdu funkcijos didžiausiai (mažiausiai) reikšmei nustatyti – išmoksta taikyti funkcijos išvestinę. Beveik kiekvienais metais matematikos egzamino užduotyse galime rasti užduotį, kuria šie gebėjimai tikrinami. Todėl mokytojai turėtų skirti daugiau dėmesio lavindami šį gebėjimą mokinių ugdymo procese. |

**23.4.** Figūrą riboja funkcijos $f(x) = 6x - x^2$ grafikas, abscisių ašis, tiesė $x = 2$ ir tiesė $x = 5$.

Apskaičiuokite šios figūros plotą.

[20] 3.17. Paprastais atvejais taikyti funkcijos išvestinę praktinio turinio optimizavimo uždaviniams spręsti.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 67,8 | 10,4 | 21,7 | 27,0 | 34,8 | 0,723 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis | Ž | 3.18, 3.20 [21] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Šia užduotimi tikrinamas mokinių gebėjimas apskaičiuoti kreivinės figūros plotą. Užduotis – standartinė – apibrėžtinio integralo taikymo kreivinės figūros plotui apskaičiuoti, įprasta valstybinių egzaminų užduotyse. Šiais metais ji buvo ypač elementari ir nereikalaujanti jokių papildomų situacijos modeliavimo gebėjimų. Tačiau ją atlikti mokiniams nesisekė – jie sugebėjo surinkti tik 27 proc. visų galimų už šią užduotį skiriamų taškų.

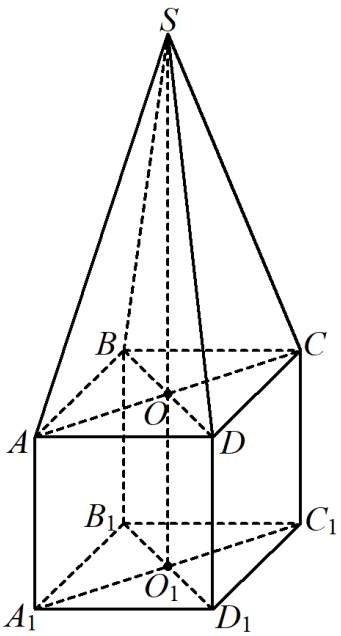
- Dauguma šią išplėstinio kurso užduotį sprendusių mokinių renkasi teisingą strategiją plotui apskaičiuoti (t. y. teisingai užrašo apibrėžtinį integralą), tačiau klysta rasdami pirmykštę funkciją arba nemoka teisingai įrašyti rėžių gautoje pirmykštėje funkcijoje.
- Mokinių sprendimuose vis dar pasitaiko labai neteisingas žymenų bei simbolių naudojimas, kuris neleidžia įvertinti jų gebėjimo apskaičiuoti kreivinės figūros plotą.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Nemaža dalis mokinių žino, kad reikia taikyti apibrėžtinį integralą kreivinės figūros plotui apskaičiuoti. Net ir patenkinąmąjį lygį pasiekusių mokinių darbuose galima rasti puikių ir teisingų šios užduoties sprendimų. Tačiau ugdymo procese reikia dar daug dėmesio skirti teisingam ir tiksliam mokinių matematiniam komunikavimui, pateikiant uždavinio sprendimą.

[21] 3.18. Taikyti funkcijų, išreikštų daugianariais, pirmykščių funkcijų radimo taisykles. 3.20. Taikyti apibrėžtinius integralus nesudėtingų kreivinių figūrų plotams apskaičiuoti, matematinio bei praktinio turinio problemoms spręsti.

**24.** Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ ir kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (žr. pav.) tūriai yra vienodi ir kiekvienas iš jų lygus 216.




**24.1.** Apskaičiuokite atkarpos $SO_1$ ilgį.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | |
| 53,7 | 10,9 | 35,4 | 40,8 | 41,3 | 0,705 |

**24.2.** Apskaičiuokite atstumą nuo taško $S$ iki tiesės $AA_1$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 96,6 | 0,8 | 2,6 | 3,0 | 5,2 | 0,384 | Išplėstinis | Geometrija | Pagrindinis | PS | 2.6 [22] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Spręsdami šią užduotį mokiniai turėjo neįprastoje situacijoje pademonstruoti žinias ir gebėjimus, apskaičiuoti atstumą nuo taško iki tiesės.

- Užduotį atlikti mokiniams nesisekė, nes dauguma ją sprendusiųjų ieškojo ne atsumo tarp taško ir tiesės, o atstumo tarp taškų $S$ ir $A$. Galima spėti, kad mokinius suklaidino užrašas „iki tiesės $AA_1$“. Nepaisant to, mokiniams turi būti žinoma, kad tiesė – begalinė ir atstumas nuo taško iki tiesės lygus statmens, nubrėžto iš to taško į tiesę, ilgiui. Problema ta, kad mokiniams sunkiai sekėsi sugalvoti, kad reikia papildyti brėžinį ir nubrėžti tiesės tęsinį, o tada atpažinti, kad atstumas lygus kubo pagrindo įstrižainės pusei.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Kaip minėta, geometrijos srities uždavinių sprendimo sunkumo rodikliai žemiausi jau ne vienerius metus. Ypač erdvinio mąstymo reikalaujančios užduotys – sunkios mokiniams. Sprendžiant tokio tipo uždavinius reikia didelį dėmesį skirti šių uždavinių vaizdiniam pateikimui, tiek konstruojant realius modelius, tiek pasitelkiant informacines komunikacijos technologijas.

[22] 2.6. Paprastais atvejais pavaizduotose erdvinėse figūrose nustatyti / apskaičiuoti atstumą tarp prasilenkiančių tiesių, kampo tarp prasilenkiančių tiesių didumą, atstumą tarp tiesės ir jai lygiagrečios plokštumos, atstumą tarp lygiagrečių plokštumų.

Atstumai tarp įvairių erdvės objektų (taškų, tiesių, plokštumų) apibrėžiami ir pradedami skaičiuoti 11–12 klasėse. Šiuos atstumus mokiniai skaičiuoja, kai minėti objektai yra vidurinio ugdymo matematikos bendrojoje programoje apibrėžtų erdvinių figūrų elementai ar dalys. Sunkiausiai mokiniams įsivaizduoti tam tikras situacijas, kai erdvės vaizdas perkeliamas į plokštumą. Todėl ugdymo procese daugiau dėmesio reikėtų skirti erdvinių figūrų braižymui, turėti jų brėžinių klasėje ir (ar) pasitelkti realius modelius. Taip pat reikėtų atkreipti dėmesį, kad norint gerai spręsti stereometrijos uždavinius, ypač sudėtingesnius, reikia turėti tinkamų žinių ir įgūdžių, susijusių su planimetrijos temomis.

**25.** Išspręskite lygtį $f'(x) = f(x)$, kai $f(x) = e^x - e^{-x} + 4$.

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | |
| 76,2 | 5,2 | 8,2 | 10,5 | 17,6 | 18,1 | 0,751 | Išplėstinis | Funkcijos ir analizės pradmenys | Aukštesnysis | T | 3.11 [23] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Norint teisingai išspręsti šią užduotį, mokiniai turi rasti rodiklinės ir sudėtinės rodiklinės funkcijų išvestines, sudaryti rodiklinę lygtį ir ją teisingai išspręsti. Nors funkcijos $f(x) = e^x$ išvestinė bene pati paprasčiausia iš visų funkcijų išvestinių ($f'(x) = e^x$), tačiau mokiniams šią užduotį atlikti buvo labai sunku.

- Dauguma mokinių, sprendusių šią užduotį, rado teisingą funkcijos išvestinę, tačiau ne visuomet gebėjo teisingai išspręsti sudarytą rodiklinę lygtį.
- Kai kurie vis dėlto negebėjo rasti teisingos sudėtinės funkcijos išvestinės, dėl to gavo arba labai elementarią lygtį (0 = 4), arba labai sudėtingą rodiklinę lygtį, kurią buvo galima išspręsti keitinio pagalba – ir tik maža dalis klydusiųjų, taikydami šį būdą, sugebėjo išspręsti tokią sudėtingą lygtį teisingai ir iki pabaigos.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Dažnai pastebima, kad mokiniams sunku manipuliuoti objektais, kuriuose naudojamas iracionalusis skaičius $e$: tiek su rodikliniais reiškiniais, kurių pagrindas skaičius $e$, tiek su natūriniu logaritmu $\ln x$. Lengviausias žingsnis sprendžiant šią užduotį – mokiniams rasti funkcijos išvestinę (tą sugebėjo teisingai atlikti ir kai kurie patenkinamą lygį pasiekę mokiniai), bet sudarę rodiklinę lygtį, dauguma mokinių net nebandė jos spręsti. Reikėtų mokymo proceso metu nevengti užduotyse, vietoje kitų natūraliųjų ar iracionaliųjų skaičių (koeficientų), naudoti skaičius $e$ ir $\pi$, parodant, kad ir juos taikant galioja visos tos pačios reiškinių pertvarkymo ar lygčių (nelygybių) sprendimo strategijos.

[23] 3.11. Taikyti funkcijų sandaugos, dalmens, sudėtinės funkcijos išvestinių skaičiavimo taisykles.

**26.** Gatvę apšviečia dvylika šviestuvų – šeši iš jų viena eile stovi kairėje gatvės pusėje, o kiti šeši viena eile stovi dešinėje gatvės pusėje.

**B➔26.1.** Kairėje gatvės pusėje atsitiktinai pasirenkami du šviestuvai. Kokia tikimybė, kad pasirinktieji šviestuvai yra gretimi?

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 68,8 | 20,4 | 10,8 | 21,0 | 19,3 | 0,477 | Bendrasis | Kombinatorika, tikimybės ir statistika | Patenkinamas | T | 4.2 [24] |

| **Galimos sunkumo priežastys** |
|---|
| Šiai užduočiai išspręsti mokiniai turėjo naudotis klasikiniu tikimybės apibrėžimu, tad jiems reikėjo teisingai apskaičiuoti palankių įvykiui ir visų baigčių skaičių. Dauguma mokinių, pasiekę patenkinamą, pagrindinį, aukštesnįjį lygius, spręsdami šią užduotį naudojo įvairias schemas, piešinius, baigčių išrašymo ir perrinkimo būdus, kai kurie naudojosi kombinatorinėmis daugybos taisyklėmis bei derinių (gretinių) formulėmis.<br>• Jei gretimų šviestuvų variantų skaičių teisingai pavyko suskaičiuoti beveik 30 proc. mokinių, dažniau painiotasi, kai reikėjo teisingai apskaičiuoti, kiek yra skirtingų variantų pasirenkant du šviestuvus.<br>• Kartais mokiniai klydo rinkdamiesi skirtingą variantų skaičiavimo logiką palankioms įvykiui ir visoms baigtims apskaičiuoti – pavyzdžiui, gretimų šviestuvų variantų skaičius buvo skaičiuojamas, kai jų tvarka nesvarbi, o visų baigčių skaičius skaičiuojamas kai šviestuvų išdėstymo tvarka svarbi. |
| **Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams** |
| Nepaprastai džiugu, kad sprendusieji šią užduotį mokiniai pasitelkia įvairių variantų skaičiavimų būdų: kombinatorinę daugybos ar sudėties taisyklę ir gretinių (derinių) formules, o svarbiausia, schemas, perrinkimą, loginį tekstą, grafikus, piešinius ir kita. Taip ir turi būti mokomi mokiniai mokykloje, rodant jiems kuo daugiau kombinatorikos ir tikimybių teorijos uždavinių sprendimo būdų, neapribojant jų suvokimo tik matematinėmis formulėmis. Tokia uždavinių sprendimo įvairovė sudomina ir motyvuoja mokinius mokytis, ieškoti individualaus ir suprantamiausio būdo. |

[24] 4.2. Paprastais atvejais atpažinti situacijas, kurioms galima taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą ir apskaičiuoti įvykio ir (ar) jam priešingo įvykio tikimybes.

**26.2.** Taupant elektros energiją, nuspręsta abiejose gatvės pusėse iš viso išjungti penkis šviestuvus. Kiek yra galimybių pasirinkti šiuos penkis šviestuvus taip, kad jokie du išjungti šviestuvai, esantys toje pačioje gatvės pusėje, nebūtų gretimi?

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | |
| 90,0 | 5,4 | 2,5 | 1,4 | 0,7 | 4,4 | 3,0 | 0,455 | Išplėstinis | Kombinatorika, tikimybės ir statistika | Aukštesnysis (šimtukui) | PS | 4.1 [25] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Ši daugiataškė problemų sprendimo ir matematinio modeliavimo užduotis skirta aukščiausio įvertinimo siekiantiems mokiniams. Kaip ir 26.1 užduotį, šią sprendė arba bandė spręsti dauguma mokinių: pasiekusieji tik patenkinamą lygį ir pasiekusieji pagrindinį ar aukštesnįjį. Spręsdami šią užduotį mokiniai taip pat naudojo įvairias schemas, piešinius, baigčių išrašymo ir perrinkimo būdus.

- Dažniausiai sprendusieji šią užduotį mokiniai gebėjo atlikti pirmąjį žingsnį, t. y. iššifruoti, pateikti individualų supratimą, ką reškia išjungti penkis negretimus šviestuvus abiejose gatvės pusėse – t. y. jie pateikė schemą, piešinį arba aprašė žodžiais, kad reikia išjungti tris šviestuvus vienoje gatvės pusėje, o du – kitoje. Tačiau toliau jiems buvo sunku tiksliai suskaičiuoti, kiek iš viso yra tokių galimybių tai padaryti.
- Kai kurie sprendusieji šią užduotį mokiniai pamiršo paskutiniame žingsnyje įvertinti, kad išjungti šviestuvus tris kairėje gatvės pusėje ir du dešinėje – ne tas pat, kas išjungti tris dešinėje gatvės pusėje ir du kairėje – todėl jų atsakymas buvo – 40 galimybių, o ne 80.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Sprendžiant mokykloje kombinatorikos ir tikimybių teorijos bei statistikos uždavinius – puiki proga lavinti mokinių kritinį mąstymą vertinant aplinkinius procesus, vykstančius visuomenėje, versle, gamtoje ar net kasdieniame gyvenime. Tai, kad daugelis mokinių, net ir pasiekę tik patenkinamą lygį, vis dėlto pateikė 26.1 ir 26.2 užduočių sprendimus, kad ir ne visada teisingus, rodo, kad mokiniams šios užduotys patrauklios ir (ar) įdomios.

[25] 4.1. Taikyti gretinių bei derinių formules.

**27.** Įmonė turi naujos ir senos kartos lazerių. Naujos kartos lazerio per vieną valandą išpjautų detalių skaičius yra sveikasis ir didesnis už 8. Senos kartos lazeris per vieną valandą išpjauna keturiomis detalėmis mažiau negu naujos kartos lazeris. Tam tikrą gautą užsakymą įmonė vienu naujos kartos lazeriu gali atlikti per sveikąjį valandų skaičių, o trimis senos kartos lazeriais – dviem valandomis greičiau. Kiek daugiausia detalių gali sudaryti šį užsakymą?

| *Taškų pasiskirstymas (%)* | | | | | *Sunkumas* | *Skiriamoji geba* | *Koreliacija* | *Kursas* | *Veiklos sritis* | *Lygis* | *Genėjimai* | *Programos punktas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | |
| 93,3 | 4,6 | 1,1 | 0,7 | 0,3 | 2,6 | 2,0 | 0,458 | Išplėstinis | Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos. | Aukštesnysis (šimtukui) | PS | 1.33 [26] |

**Galimos sunkumo priežastys**

Ši užduotis priskiriama aukštesniojo lygio problemų sprendimo uždavinams, kai nestandartinė, neįprasta situacija aprašoma matematiniu modeliu (šiuo atveju lygtimi su dviem nežinomaisiais arba sistema) ir sprendžiama taikant kurią nors problemų sprendimo strategiją, kurios aprašytos programos 6.3.1–6.3.11 punktuose (2 psl.).

- Tikėtasi, kad daugumai mokinių bent pavyks sudaryti teisingą lygtį su dviem nežinomaisiais arba lygčių sistemą, nes raidinių reiškinių, lygčių bei nelygybių sudarymo gebėjimai jau ugdomi nuo 5 klasės bei gilinami naujais sudėtingesniais reiškiniais visose klasėse iki mokyklos baigimo. Tačiau užduoties sprendimo rezultatai rodo, kad greičiausiai tai pavyko padaryti tik beveik 6,7 proc. mokinių. Negebant aprašyti užduotyje pateiktos situacijos matematiniu modeliu, negalima ir visiškai teisingai išspręsti šios užduoties, nebent atspėti arba išmąstyti (perrenkant variantus) pateiktos užduoties atsakymą, nepagrindžiant atsakymo buvimo vieninteliu.
- Kai kurie mokiniai, pasiekę net aukštesnįjį lygį, šios užduoties nesprendė – arba nespėjo, arba sutriko išvydę ilgą tekstą. Jau keletą metų pastebima, kad mokiniams sunku atlikti užduotis, kuriose daug teksto ir tokių užduočių sprendimo rezultatai pastebimai prastėja.

**Rekomendacijos mokiniams ir mokytojams**

Mokiniams, siekiantiems aukščiausio įvertinimo, rekomenduojama spręsti ne tik įprastus naudojamų mokykloje vadovėlių uždavinius, bet ir juose pateiktus probleminius uždavinius (jų tikrai galima rasti kiekviename iš jų), taip pat, ruošiantis egzaminui, spręsti ankstesnių metų valstybinių brandos egzaminų užduotis, naudotis papildoma literatūra, uždavinynais, skirtais vidurinio ugdymo programos kursui pasikartoti ir pasiruošti valstybiniams egzaminams.

Ugdymo procese vis dėlto daugiau laiko reikia skirti matematinio modeliavimo įgūdžiams tobulinti, parenkant kuo įvairesnių situacijų, aprašomų tiek lygtimis, jų sistemomis ar nelygybėmis, tiek funkcijomis, brėžiniais, schemomis, paveikslais, grafikais ir t. t. Negebėjimas gauti pirmojo taško sprendžiant šią užduotį, ir labai prasti 23.2 užduoties rezultatai rodo, kad mokiniams trūksta tinkamų įgūdžių aprašant įvairias situacijas matematiniais modeliais.

[26] 1.33. Įvairias situacijas aprašyti lygtimis, nelygybėmis, sistemomis.