LIETUVOS RESPUBLIKOS ŠVIETIMO IR MOKSLO MINISTERIJA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS

2004 M. MATEMATIKOS

VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO REZULTATŲ

KOKYBINĖ ANALIZĖ

Jolita Dudaitė, Viktorija Sičiūnienė, Marytė Stričkienė

ĮVADAS

Rengiant 2004 metų matematikos valstybinio brandos egzamino kokybinę analizę buvo siekiama:

- išanalizuoti mokinių egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatus;
- pademonstruoti įvairias uždavinių sprendimo strategijas, pateikiant ir komentuojant mokinių sprendimo pavyzdžius, specialistų parengtas kai kurių uždavinių sprendimo vertinimo instrukcijas;
- aptarti mokinių darbuose pasitaikiusias būdingas klaidas;
- palyginti 2004 ir 2003 metų rezultatus;
- pateikti rekomendacijas mokytojams.

Egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatai aptariami priskiriant juos vienai ar kitai egzamino programos matricoje numatytai turinio sričiai:

- skaičiai, skaičiavimai, algebra;
- geometrija;
- funkcijos ir analizės pradmenys;
- kombinatorika, tikimybės ir statistika.

Nagrinėjant kiekvienos turinio srities uždavinius, atkreiptas dėmesys ir į tai, kokius gebėjimus turėjo pademonstruoti mokiniai, spręsdami konkretų uždavinį.

Statistinė ar kitokia informacija apie atskiras sritis nepateikiama, nes iš keleto vienos srities uždavinių negalima daryti patikimų apibendrintų išvadų.

Atkreipiamas dėmesys į tai, kad didelė dalis uždavinių, kurie buvo vertinami daugiau nei vienu tašku, buvo priskiriami kelioms turinio sritims (pavyzdžiui, geometrijai, funkcijoms, skaičiavimams), atsižvelgiant į tai, kurios turinio srities žinių ar įgūdžių reikalavo atitinkamas uždavinio sprendimo žingsnis.

Rengiant šią kokybinę analizę, buvo remtasi 2004 m. statistine matematikos valstybinio brandos egzamino užduoties analize, peržiūrėta daug darbų iš reprezentatyvios visų egzaminą laikiusių mokinių darbų imties.

Mokinių rezultatai buvo lyginami ir su 2003 m. šį egzaminą laikiusiųjų rezultatais.

Kad būtų lengviau skaityti analizę, procentai pateikiami sveiko skaičiaus tikslumu.

Matematikos mokymo reforma pasiekė baigiamąsias klases. 2004 metų abiturientų laida yra pirmoji, kuri mokėsi pagal reformuotos mokyklos programas ir iš naujų matematikos vadovėlių. Todėl ir šiais metais ataskaitoje dėmesys kreipiamas į uždavinių formuluotes.

Tikimės, kad ši analizė bus naudinga visiems, tiek rengiantiems valstybiniam matematikos brandos egzamino užduotis, tiek ir jam besiruošiantiems.

SKAIČIAI, SKAIČIAVIMAI, ALGEBRA

2004 metų valstybinio egzamino užduotyje buvo penki šios srities uždaviniai, du iš jų – su pasirenkamaisiais atsakymais. Uždaviniai apėmė tokias temas: dviejų intervalų sąjunga bei sankirta, racionaliosios nelygybės, tapatieji reiškinių pertvarkiai, procentai, aritmetinė bei geometrinė progresijos. Visi šios srities uždaviniai buvo suformuluoti tradiciškai, todėl dauguma mokinių bandė juos spręsti. Uždavinių sunkumas svyravo nuo 34 iki 76 proc.

Aptarsime šių uždavinių sprendimus.

Nr. 4

Nurodykite teisingą teiginį:

A $(-\infty; 3) \cap [3; 5) = (-\infty; 5)$

B $(-\infty; 3) \cup [3; 5) = (-\infty; 3]$

C $[3; 5) \cap (5; +\infty) = [3; +\infty)$

D $[3; 5) \cup [5; +\infty) = [3; +\infty)$

E $[3; 5) \cap [5; +\infty) = \{5\}$

1 pav. 4 uždavinio sąlyga

Šiuo uždaviniu buvo tikrinama, ar mokiniai moka nustatyti dviejų intervalų sąjungą bei sankirtą ir ar žino atitinkamus simbolius. Iš mokinių pasirinktų atsakymų galima daryti išvadą, kad 86 proc. mokinių supranta, kaip nustatoma dviejų intervalų sąjunga ar sankirta, tačiau teisingą atsakymą nurodė tik 56 proc. mokinių. Net 30 proc. jų neskiria sąjungos ir sankirtos simbolių. Liūdna, kad net 14 proc. mokinių visiškai nesuvokia šios temos.

Kitas standartinis šios srities uždavinys su pasirenkamaisiais atsakymais buvo pažymėtas šeštuoju numeriu.

Nr. 6

Nelygybės $\frac{1}{x} > 1$ sprendinys yra:

A $(1; +\infty)$ **B** $[0; +\infty)$ **C** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ **D** $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ **E** $(0; 1)$

2 pav. 6 uždavinio sąlyga

Mokiniai šį uždavinį sprendė gana sėkmingai: 74 proc. jų pasirinko teisingą atsakymą. Mokiniai galėjo arba spręsti duotą racionaliąją nelygybę ir palyginti gautą sprendinį su pasiūlytais, arba tiesiog patikrinti, kurie iš pasiūlytųjų intervalų nėra duotosios nelygybės sprendiniai. Malonu pastebėti, kad beveik niekas nesirinko atsakymų B ir D. Vadinasi, abiturientai atkreipė dėmesį į trupmeninio reiškinio vardiklį. 8 proc. mokinių pasirinko atsakymą C. Greičiausiai jie, intervalų metodu spręsdami nelygybę, suklupo bandydami nustatyti intervalų ženklus. Lieka tik spėlioti, kodėl net 17 proc. mokinių pasirinko atsakymą A. Akivaizdu, kad jie net nebandė tikrinti, ar intervalas yra nelygybės sprendinys. Peršasi išvada, kad šį atsakymą pasirinkusieji nesupranta, nei kaip sprendžiamos nelygybės, nei kaip būtų galima patikrinti, ar intervalas yra duotosios nelygybės sprendinys. Atkreipkime dėmesį, kad apie 15 proc. mokinių ir 4, ir 6 uždavinių rinkosi netikėčiausią atsakymą.

Kiek sunkiau mokiniams sekėsi spręsti uždavinius, kuriuose reikėjo pateikti sprendimą.

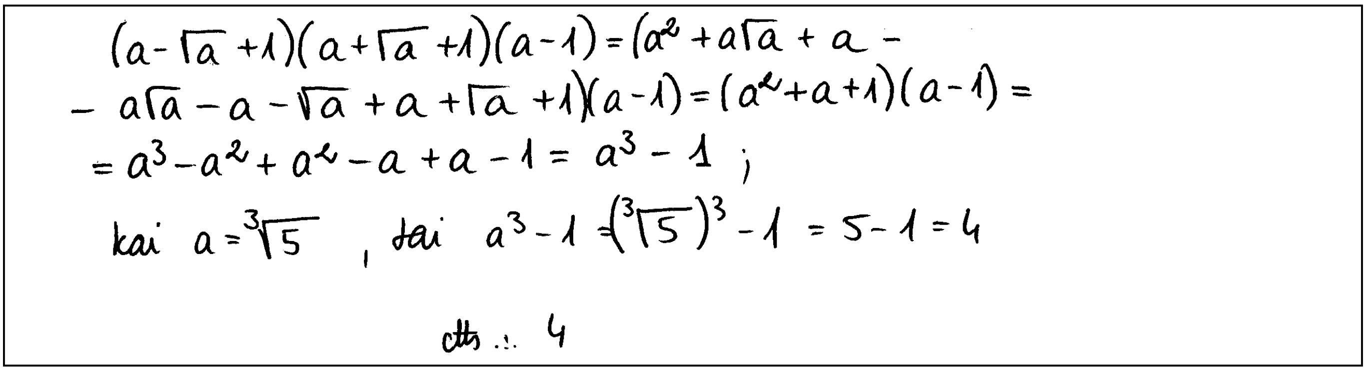
Nr. 8

Apskaičiuokite reiškinio $(a - \sqrt{a} + 1)(a + \sqrt{a} + 1)(a - 1)$ reikšmę, kai $a = \sqrt[3]{5}$.

(2 taškai)

3 pav. 8 uždavinio sąlyga

Vertinimo instrukcijoje už šio uždavinio sprendimą buvo numatyti 2 taškai: vienas – už teisingai pritaikytą kvadratų skirtumo formulę, kitas – už teisingai pritaikytą kubų skirtumo formulę ir teisingą atsakymą arba už teisingą sprendimą be formulių ir šiuo būdu gautą teisingą atsakymą. Pirmuoju būdu uždavinį sprendė labai mažai mokinių, antruoju – gana daug, tačiau teisingai šį uždavinį išsprendė 48 proc. mokinių. Pateikiame dažnai pasitaikiusį gero sprendimo pavyzdį (žr. 4 pav.)



$(a-\sqrt{a}+1)(a+\sqrt{a}+1)(a-1)=(a^2+a\sqrt{a}+a-$

$-a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+1)(a-1)=(a^2+a+1)(a-1)=$

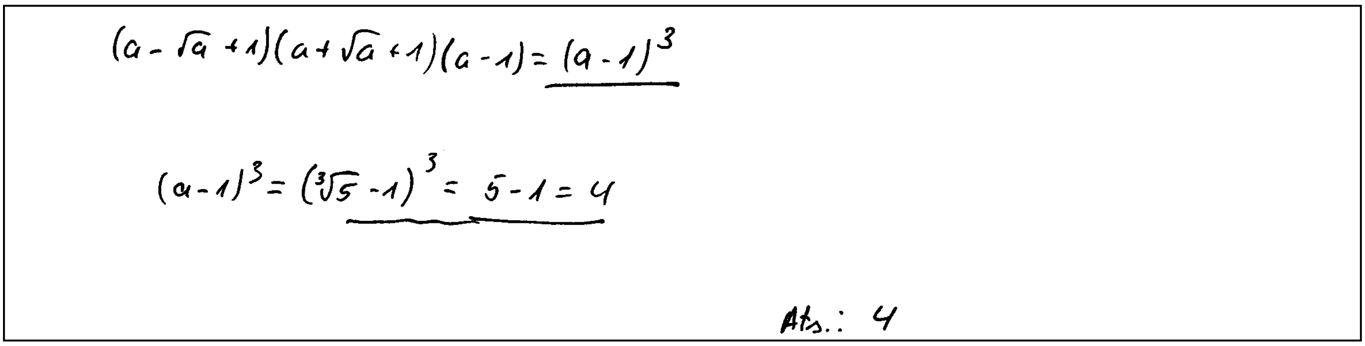
$=a^3-a^2+a^2-a+a-1=a^3-1$;

kai $a=\sqrt[3]{5}$, tai $a^3-1=(\sqrt[3]{5})^3-1=5-1=4$

Ats.: 4

4 pav. 8 uždavinio sprendimo pavyzdys

Net 43 proc. abiturientų už šio uždavinio sprendimą gavo 0 taškų įvertinimą, nors tik nedidelė jų dalis visai nesprendė šio uždavinio. Dauguma 0 taškų gavusių abiturientų teikė sprendimus, rodančius, jog visiškai nemoka atlikti tapačių reiškinių pertvarkių (žr. 8 pav.). Nerimą kelia tai, kad tapačių pertvarkų nemoka ir tie mokiniai, kurie surinko daugiau nei pusę galimų egzamino užduoties taškų.



$(a-\sqrt{a}+1)(a+\sqrt{a}+1)(a-1)=\underline{(a-1)^3}$

$(a-1)^3=(\sqrt[3]{5}-1)^3=\underline{5-1=4}$

Ats.: 4

5 pav. 8 uždavinio neteisingo sprendimo pavyzdys

Šio uždavinio sprendimo rezultatai rodo, kad mokinių įgūdžiai tapačiai pertvarkyti algebrinius reiškinius, lyginant su ankstesnių metų atitinkamų uždavinių sprendimo rezultatais, yra prastesni. Panašiai šį uždavinį sprendė dalis net 13–27 taškus iš egzamino užduoties surinkusių mokinių (primename, jog egzamino užduoties taškų vidurkis buvo 21,37 taško).

Nr. 9

Turistai 50 proc. kelio nuvažiavo traukiniu, 40 proc. likusio kelio – autobusu. Kiek procentų kelio turistams liko įveikti pėsčiomis?

(3 taškai)

6 pav. 9 uždavinio sąlyga

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
9		**3**	
	Pažymime visą kelią x. Traukiniu turistai nuvažiavo $0,5x$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą traukiniu nuvažiuotą kelią.
	Autobusu nuvažiavo $(x-0,5x)\cdot 0,4=0,2x$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą autobusu nuvažiuotą kelią.
	Pėsčiomis liko įveikti $x-0,5x-0,2x=0,3x$. *Ats.*: 30 %.	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba. Vertinimas nesikeičia, jeigu mokiniai vietoje x pasirenka konkretų kelio ilgį arba jį pažymi 1.

7 pav. 9 uždavinio vertinimo instrukcija

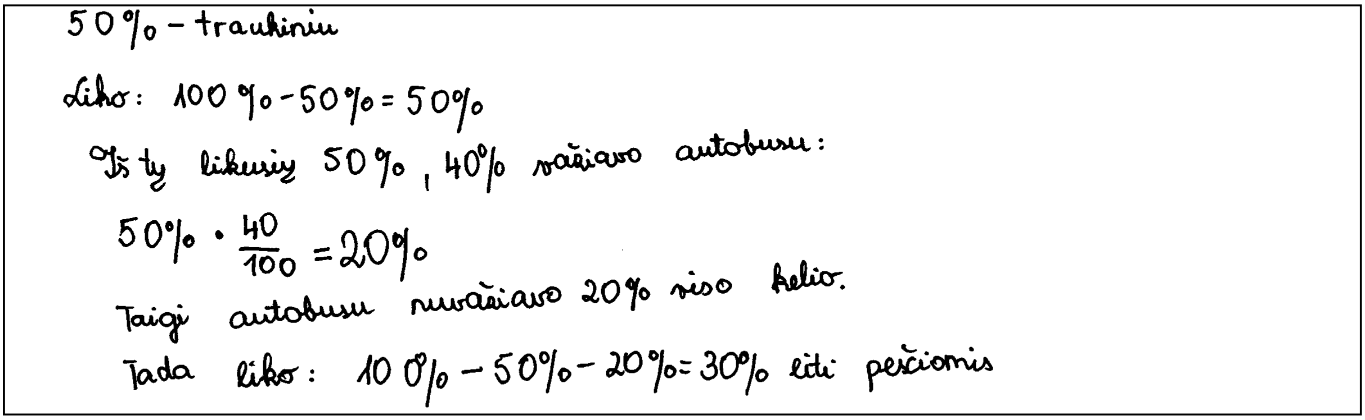
Procentų uždavinius mokiniai mokosi spręsti 5–6 klasėje. Pamažu jie susipažįsta su įvairiausiais šių uždavinių sprendimo būdais, metodais. Baigdami mokyklą jie gali pasirinkti ne tik uždavinio sprendimo strategiją, bet ir būdą jai įgyvendinti. 8–10 pav. matome kelis šio uždavinio gero sprendimo pavyzdžius.

$0{,}5a + 0{,}5 \cdot 0{,}4a = 0{,}5a + 0{,}2a = 0{,}7a$

$a - 0{,}7a = 0{,}3a$

Liko 30% viso kelio

8 pav. 9 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



50% – traukiniu

Liko: 100% − 50% = 50%

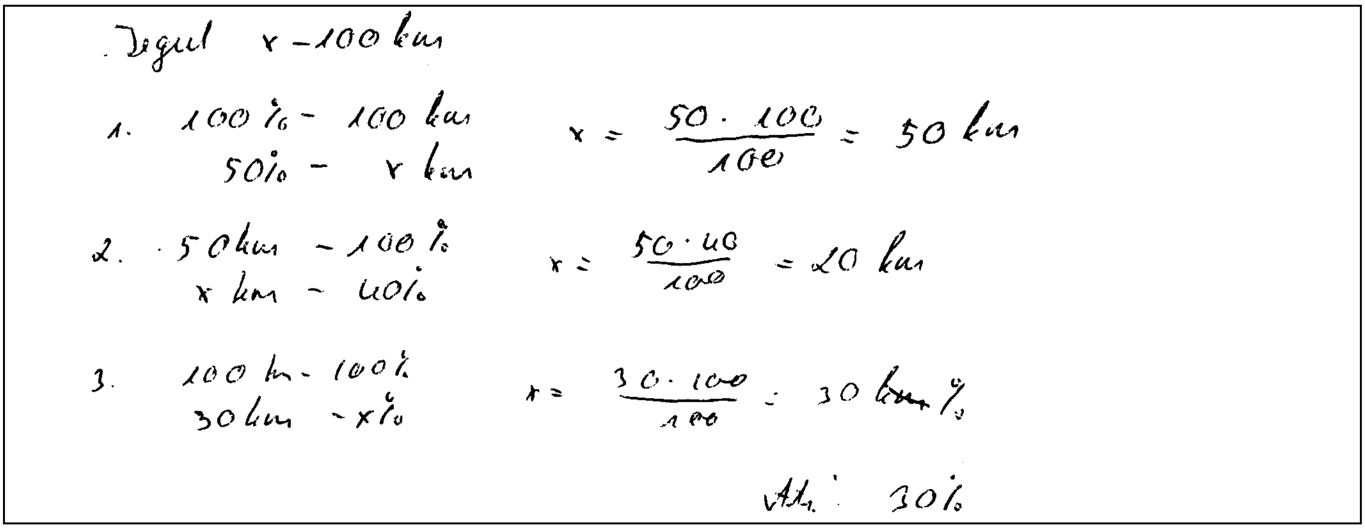
Iš tų likusių 50%, 40% važiavo autobusu:

$50\% \cdot \frac{40}{100} = 20\%$

Taigi autobusu nuvažiavo 20% viso kelio.

Tada liko: 100% − 50% − 20% = 30% eiti pėsčiomis

9 pav. 9 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



Tegul x – 100 km

1. 100% – 100 km
   50% – x km
   $x = \frac{50 \cdot 100}{100} = 50$ km

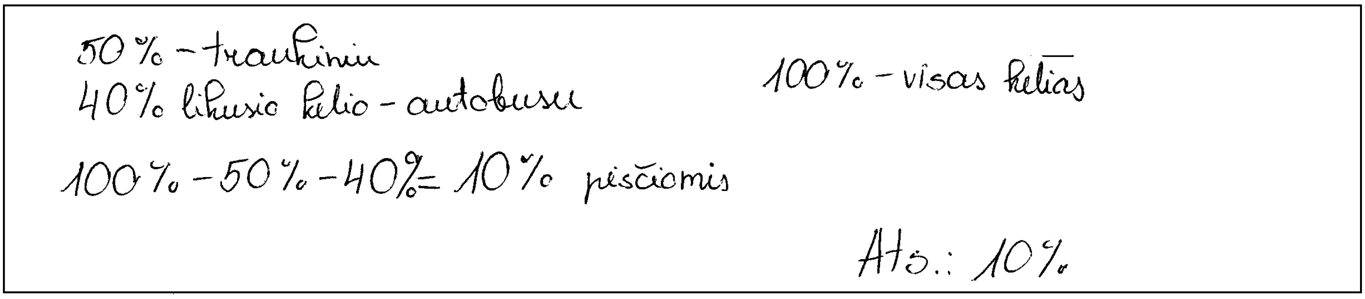
2. 50 km – 100%
   x km – 40%
   $x = \frac{50 \cdot 40}{100} = 20$ km

3. 100 km – 100%
   30 km – x%
   $x = \frac{30 \cdot 100}{100} = 30$ km %

Ats.: 30%

10 pav. 9 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Deja, tik 67 proc. mokinių už uždavinio sprendimą sugebėjo surinkti visus 3 taškus, nors šį uždavinį bandė spręsti beveik visi. 0 taškų įvertinimą gavo 13 proc. mokinių. Dauguma 0 taškų gavusių mokinių pateikė sprendimą (žr. 11 pav.), kuris verčia susimąstyti – ką šis mokinys tiek metų veikė per matematikos pamokas? Kažin ar toks sprendimas galėtų būti pateisintas egzamino metu patirta įtampa.



50% – traukiniu

40% likusio kelio – autobusu

100% – visas kelias

100% − 50% − 40% = 10% pėsčiomis

Ats.: 10%

11 pav. 9 uždavinio klaidingo sprendimo pavyzdys

Vieną tašką už šio uždavinio sprendimą praradę mokiniai (tokių buvo 9 proc.) daugeliu atveju parašė atsakyme 20 proc., t. y. nurodė autobusu nuvažiuoto kelio dalį procentais, o ne kiek procentų kelio turistams liko įveikti pėsčiomis.

11 proc. mokinių už šio uždavinio sprendimą gavo tik vieną tašką – jie teisingai nustatė traukiniu nuvažiuotą kelią. Dalis mokinių, nustatydami autobusu nuvažiuotą kelią, nenurodė, kad skaičiuoja 40 proc. likusio kelio, t. y. pateikė nepilną sprendimą, iš kurio nebuvo aišku, kokio skaičiaus 40 proc. skaičiuoja. Galbūt parinkus uždavinio sąlygoje ne tokius „patogius“ skaičius, dalis mokinių ir nebūtų praradusi šio taško. Mokymo procese derėtų dažniau atkreipti mokinių dėmesį į tai, jog pateikdami uždavinio sprendimą jie turėtų paminėti ir tinkamai perteikti visus esminius uždavinio sprendimo momentus.

Nr.11

Trys skaičiai $b_1 = 1$, b_2, b_3 yra mažėjančios geometrinės progresijos nariai. Skaičiai $3b_1$, $4b_2$, $4b_3$ yra vienas po kito einantys aritmetinės progresijos nariai. Raskite geometrinės progresijos vardiklį.
(4 taškai)

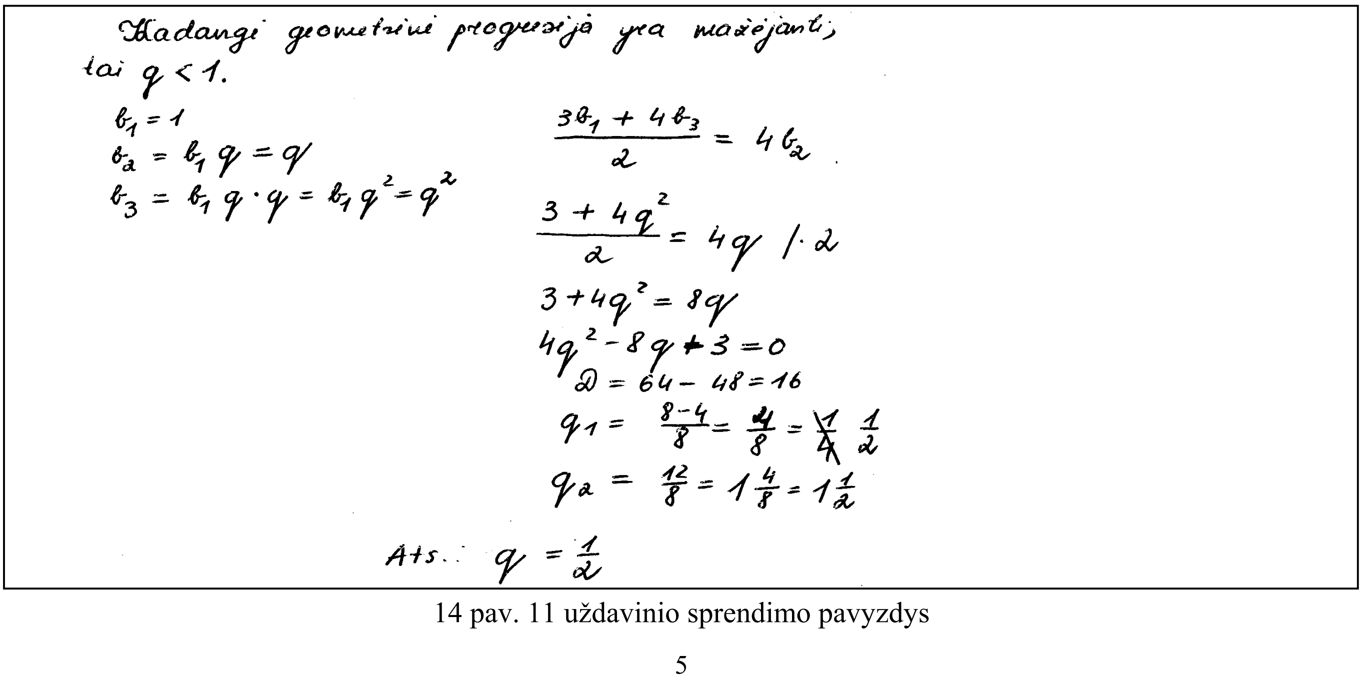
12 pav.11 uždavinio sąlyga

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
11		4	
	Pažymime geometrinės progresijos vardiklį q.		
	$1, q, q^2$ – mažėjanti geometrinė progresija.	• 1	Už teisingą seką.
	$3, 4q, 4q^2$ – aritmetinė progresija.	• 1	Už teisingą seką.
	$4q = \frac{4q^2 + 3}{2}$;	• 1	Už teisingą lygties užrašymą.
	$q_1 = \frac{3}{2}$ (netinka pagal sąlygą); $q_2 = \frac{1}{2}$.		
	Ats.: $q = \frac{1}{2}$.	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba. Jei mokinys pasirenka kitą sprendimo būdą ir sudaro teisingą lygtį ar lygčių sistemą, tai skiriamas *1 taškas* už teisingą geometrinės progresijos savybės pritaikymą ir *1 taškas* – už teisingą aritmetinės progresijos savybės pritaikymą. *1 taškas* – už teisingą lygties arba sistemos sprendimą ir *1 taškas* – už gautą teisingą q.

13 pav.11 uždavinio vertinimo instrukcija

Šio uždavinio sunkumas – 34 proc. Maksimalų įvertinimą gavo 23 proc. mokinių. Nors pagal formuluotę uždavinys yra tradicinis, tačiau gana daug mokinių visai jo nesprendė, o 0 taškų įvertinimą gavo net 49 proc. mokinių. 14 pav. pateikiame šio uždavinio gero sprendimo pavyzdį.



Kadangi geometrinė progresija yra mažėjanti,
tai $q < 1$.

$b_1 = 1$
$b_2 = b_1 q = q$
$b_3 = b_1 q \cdot q = b_1 q^2 = q^2$

$$\frac{3b_1 + 4b_3}{2} = 4b_2$$

$$\frac{3 + 4q^2}{2} = 4q \;/\cdot 2$$

$$3 + 4q^2 = 8q$$

$$4q^2 - 8q + 3 = 0$$

$$D = 64 - 48 = 16$$

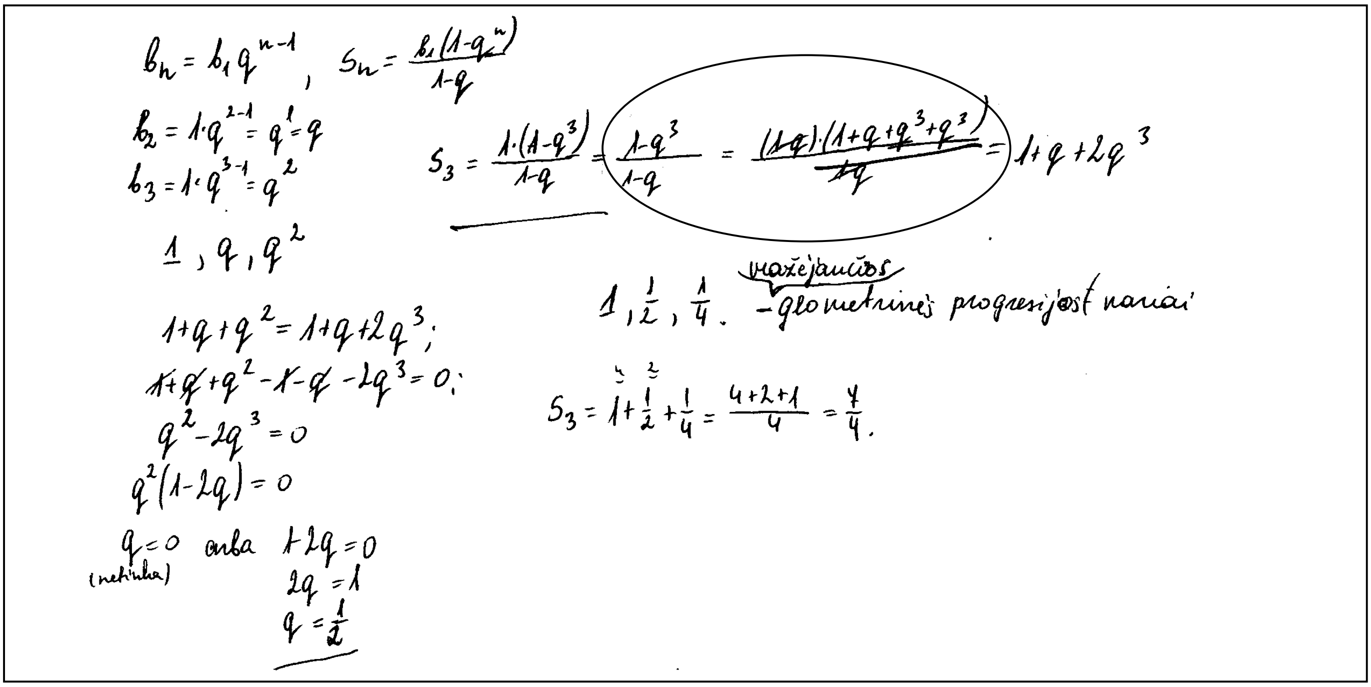
$$q_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{12}{8} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$$

Ats.: $q = \frac{1}{2}$

14 pav. 11 uždavinio sprendimo pavyzdys

Pelnyti pirmuosius du taškus buvo visai nesudėtinga – reikėjo tiktai teisingai užrašyti aritmetinės ir geometrinės progresijų sekas arba pritaikyti progresijų savybes. Egzamino formulių rinkinyje nėra aritmetinės progresijos *n*-ojo nario ir pirmųjų *n* narių sumos formulių, tačiau yra atitinkamos geometrinės progresijos formulės. Taigi nenuostabu, kad radę šias formules, kai kurie mokiniai bandė taikyti jas abi. (Žr. 15 pav. Beje, atkreipiame dėmesį ir į tai, kaip pavyzdyje vėl pritaikyta „kubų skirtumo formulė“. Prisiminkime 5 pavyzdyje nagrinėtą situaciją.)



$b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$b_2 = 1\cdot q^{2-1} = q^1 = q$

$b_3 = 1\cdot q^{3-1} = q^2$

$S_3 = \frac{1\cdot(1-q^3)}{1-q} = \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{\cancel{(1-q)}\cdot(1+q+q^3+q^3)}{\cancel{1-q}} = 1+q+2q^3$

$\underline{1}, q, q^2$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. – mažėjančios geometrinės progresijos nariai

$1+q+q^2 = 1+q+2q^3;$

$\cancel{1}+\cancel{q}+q^2-\cancel{1}-\cancel{q}-2q^3 = 0;$

$q^2-2q^3 = 0$

$q^2(1-2q) = 0$

$q = 0$ (netinka) arba $1-2q = 0$

$2q = 1$

$\underline{q = \frac{1}{2}}$

$S_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4}.$

15 pav. 11 uždavinio klaidingo sprendimo pavyzdys

Trečiasis taškas buvo skiriamas už teisingą lygties arba sistemos sprendimą. Kaip rodo šio uždavinio sprendimo rezultatai, jeigu du taškus surinko 38 proc. mokinių, tai 7 proc. jų nesugebėjo teisingai rasti sudarytos lygties ar sistemos sprendinių.

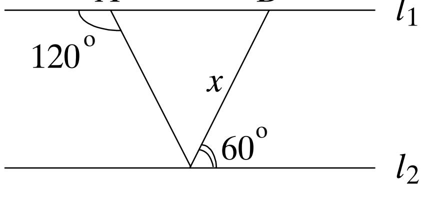
GEOMETRIJA

2004 m. egazamino užduotyje buvo keturi geometrijos uždaviniai, du iš jų – su pasirenkamaisiais atsakymais. Uždaviniai apėmė tokias temas: vektorių ilgis, vektorių skaliarinė sandauga, kampų savybės, lygiakraščio trikampio savybės, trikampio plotas, Pitagoro teorema, tetraedras. Geometrijos uždavinių sunkumas – nuo 23 iki 90 proc.

Lengviausiame geometrijos, o kartu ir visos egzamino užduoties, uždavinyje reikėjo rasti trikampio kraštinės ilgį. (Žr. 16 pav.)

Nr. 2

Kai $l_1 \parallel l_2$, $AB = 3$, tai $x =$



A 3 **B** $4\cos 60^\circ$ **C** 5 **D** $4\cos 120^\circ$ **E** $4\sin 60^\circ$

16 pav. 2 uždavinio sąlyga

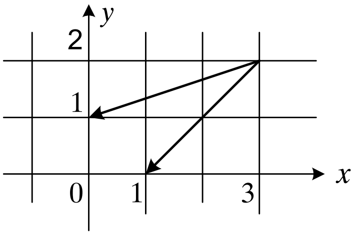
Kad uždavinys būtų išspręstas, tereikėjo žinoti kampų savybes ir pastebėti, jog trikampis yra lygiakraštis. Uždavinį teisingai išsprendė net 90 proc. mokinių. Pernai geriausiai spręsto uždavinio, taip pat geometrijos (stačiakampio gretasienio tūrio radimas), sunkumas buvo 84 proc.

Pažvelgus į antrojo uždavinio sprendimo rezultatus matyti, jog nė vienas duotasis klaidingas atsakymas nesulaukė didesnio mokinių dėmesio – kiekvieną klaidingą atsakymą pasirinko panašus skaičius mokinių. Taip atsitiko todėl, kad pateikti klaidingi atsakymai nėra „patrauklūs“. Net ir nelabai gabus mokinys, ieškodamas ir nemokėdamas rasti kraštinės ilgio, vargu ar rinktųsi atsakymus, kurie pateikti su sinuso ar kosinuso žymenimis. „Gražiau“ atrodantys atsakymai tokiems mokiniams galėtų būti tik „3“ ir „5“ (pasirinkimas nedidelis). Atsakymo „5“ negalima gauti jokiais skaičiavimais. Taigi jį pažymėti galima tik atsitiktinai renkantis, t. y. nemokant išspręsti. Sunku pasakyti, ar mokiniai šį uždavinį būtų sprendę taip pat gerai, jei jis būtų ne su pasirenkamaisiais atsakymais.

Kitas nesudėtingas geometrijos uždavinys – taip pat su pasirenkamaisiais atsakymais. (Žr. 17 pav.)

Nr. 7

Paveiksle pavaizduoti vektoriai.



Jų skaliarinė sandauga lygi:

A –4 **B** 8 **C** 6 **D** 4 **E** 0

17 pav. 2 uždavinio sąlyga

Teisingai jį išspręsti sugebėjo tik apie 50 proc. dvyliktokų. Sprendžiant uždavinį, pirmiausia reikėjo rasti vektorių koordinates ir po to pritaikyti egzamino užduoties formulių rinkinyje pateiktą vektorių skaliarinės sandaugos formulę. Populiariausias klaidingas atsakymas buvo „6“. Jį mokiniai greičiausiai galėjo gauti sudauginę vektorių pradžios taško koordinates. Taip pat nemažai mokinių pasirinko klaidingą atsakymą „0“. Šį atsakymą mokiniai galėjo gauti sudauginę vektorių pabaigos taškų koordinates – (0; 1) ir (1; 0). Tačiau keista, kad, gavę atsakymą „0“, mokiniai visiškai juo nesuabejojo, nors paveiksle pavaizduoti vektoriai nė kiek nepanašūs į vienas kitam statmenus. Kita vertus, džiugu, jog atsakymo „– 4“ nesirinko beveik niekas. Tai gali rodyti mokinių supratimą, jog skaliarinė sandauga (arba tiesiog vienintelis pateiktas atsakymas su neigiamu ženklu dvyliktokams neatrodė įtikinamas) gali būti neigiama tik tuo atveju, kai vektoriai sudaro buką kampą.

Kitas geometrijos uždavinys jau sudėtingesnis. (Žr. 18 pav.)

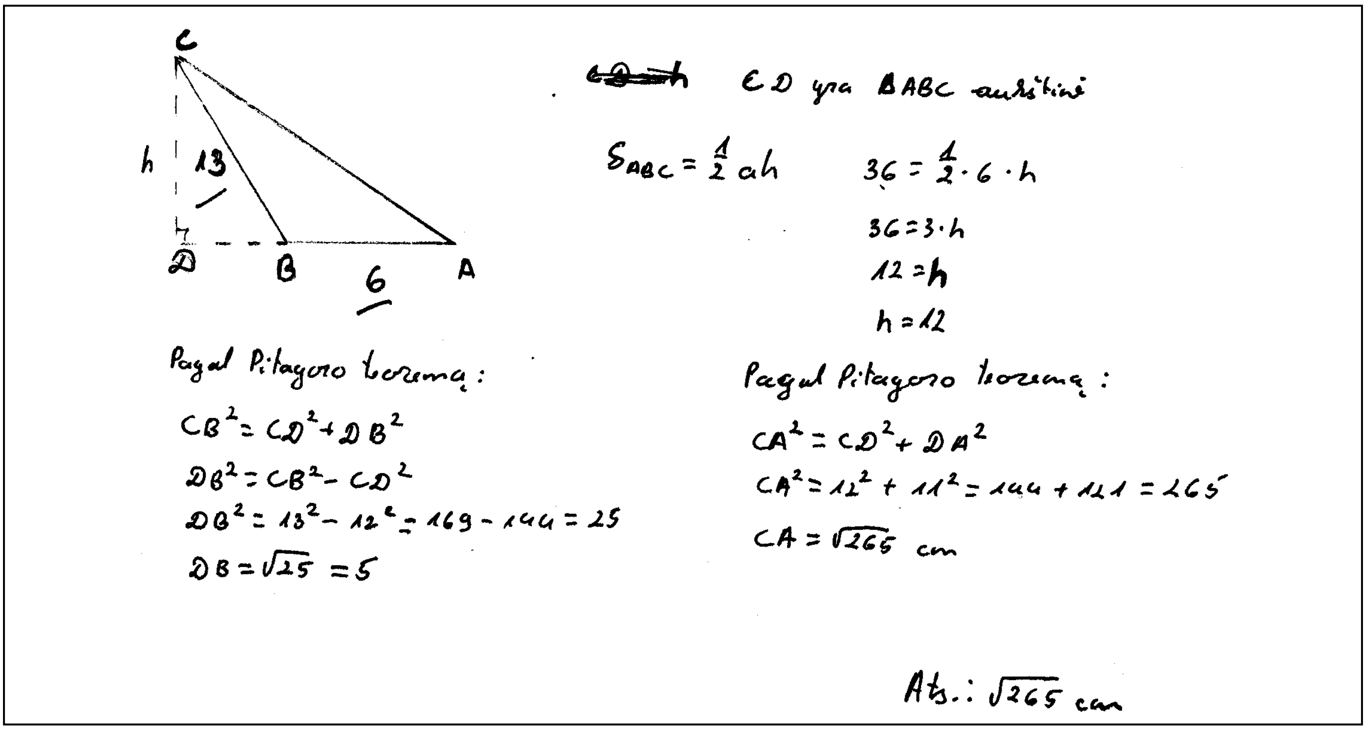
Nr.13

Trikampio ABC plotas lygus 36 cm^2, $AB = 6$ cm, $BC = 13$ cm, kampas B yra bukasis.
Apskaičiuokite AC.

(4 taškai)

18 pav. 7 uždavinio sąlyga

Nors uždavinio sunkumas buvo tik 35 proc., visus 4 taškus gavo vos 16 proc. dvyliktokų. Nors uždavinys mokiniams nebuvo lengvas, tačiau vienaip ar kitaip dauguma jį bandė spręsti. Iš tiesų uždavinys apie trikampį, jo plotą neatrodo sunkus. Todėl visiškai šio uždavinio nesprendė vos vienas kitas mokinys. Nors visiškai teisingai uždavinį išsprendė tik 16 proc. dvyliktokų, tačiau tarp jų buvo ir tokių, kurie iš visos egzamino užduoties tebuvo surinkę 13 taškų (už visą užduotį buvo galima surinkti 52 taškus). Štai tokio mokinio, surinkusio 13 taškų, sprendimas (žr. 19 pav.).



~~CD=h~~ CD yra ΔABC aukštinė

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ah$

$36 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$

$36 = 3 \cdot h$

$12 = h$

$h = 12$

Pagal Pitagoro teoremą:

$CB^2 = CD^2 + DB^2$

$DB^2 = CB^2 - CD^2$

$DB^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

$DB = \sqrt{25} = 5$

Pagal Pitagoro teoremą:

$CA^2 = CD^2 + DA^2$

$CA^2 = 12^2 + 11^2 = 144 + 121 = 265$

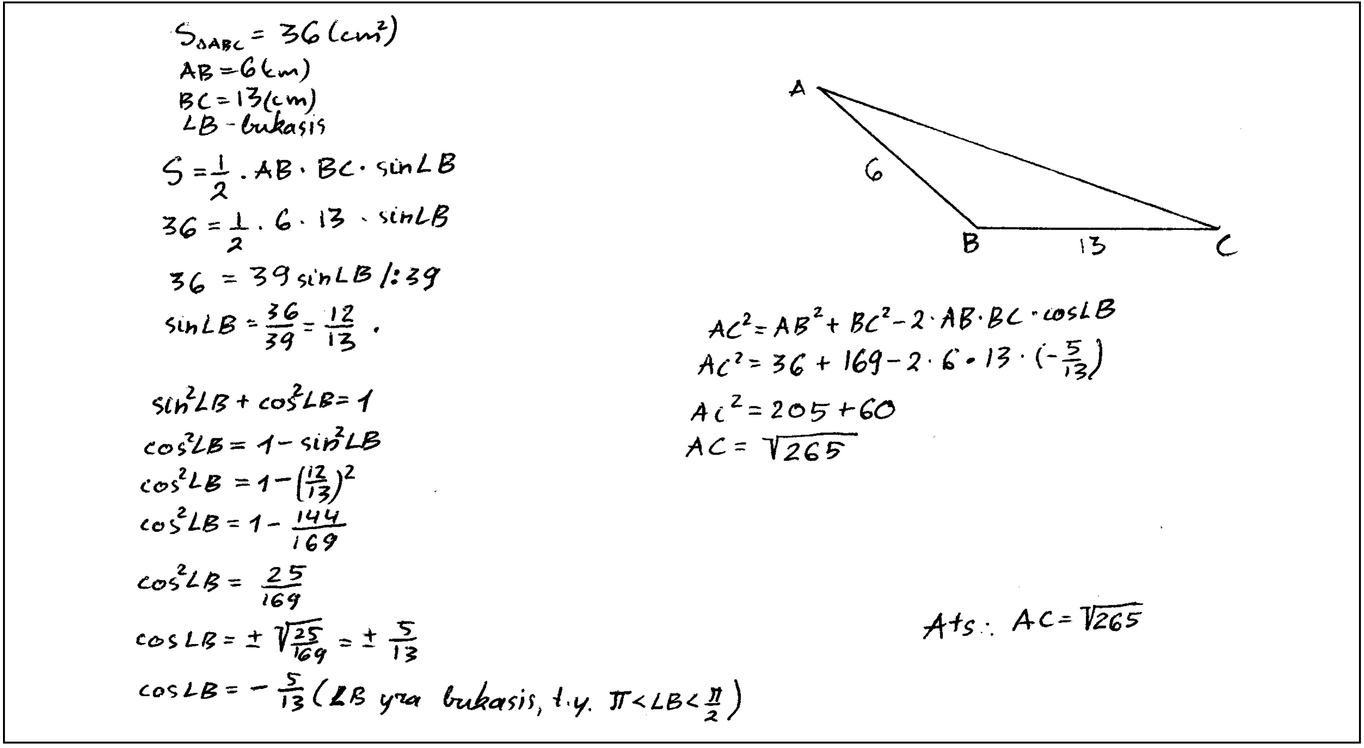
$CA = \sqrt{265}$ cm

Ats.: $\sqrt{265}$ cm

19 pav. 13 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Tai pats paprasčiausias sprendimo būdas, kurį dažniau rinkosi prastesnius egzamino rezultatus gavę dvyliktokai. Brėžinys papildytas aukštine, jos ilgis rastas naudojantis pačia elementariausia trikampio ploto formule $S = \frac{1}{2}ah$, po to du kartus pritaikyta Pitagoro teorema. Deja, tokiu paprastu būdu uždavinį sprendė mažuma mokinių.

Absoliuti dauguma dvyliktokų rinkosi šiek tiek sudėtingesnį sprendimo būdą (žr. 20 pav.).



$S_{\Delta ABC} = 36\ (cm^2)$

$AB = 6\ (cm)$

$BC = 13\ (cm)$

$\angle B$ - bukasis

$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$

$36 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 \cdot \sin\angle B$

$36 = 39 \sin\angle B \ /:39$

$\sin\angle B = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$.

$\sin^2\angle B + \cos^2\angle B = 1$

$\cos^2\angle B = 1 - \sin^2\angle B$

$\cos^2\angle B = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$

$\cos^2\angle B = 1 - \frac{144}{169}$

$\cos^2\angle B = \frac{25}{169}$

$\cos\angle B = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$

$\cos\angle B = -\frac{5}{13}$ ($\angle B$ yra bukasis, t.y. $\pi < \angle B < \frac{\pi}{2}$)

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$

$AC^2 = 36 + 169 - 2 \cdot 6 \cdot 13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)$

$AC^2 = 205 + 60$

$AC = \sqrt{265}$

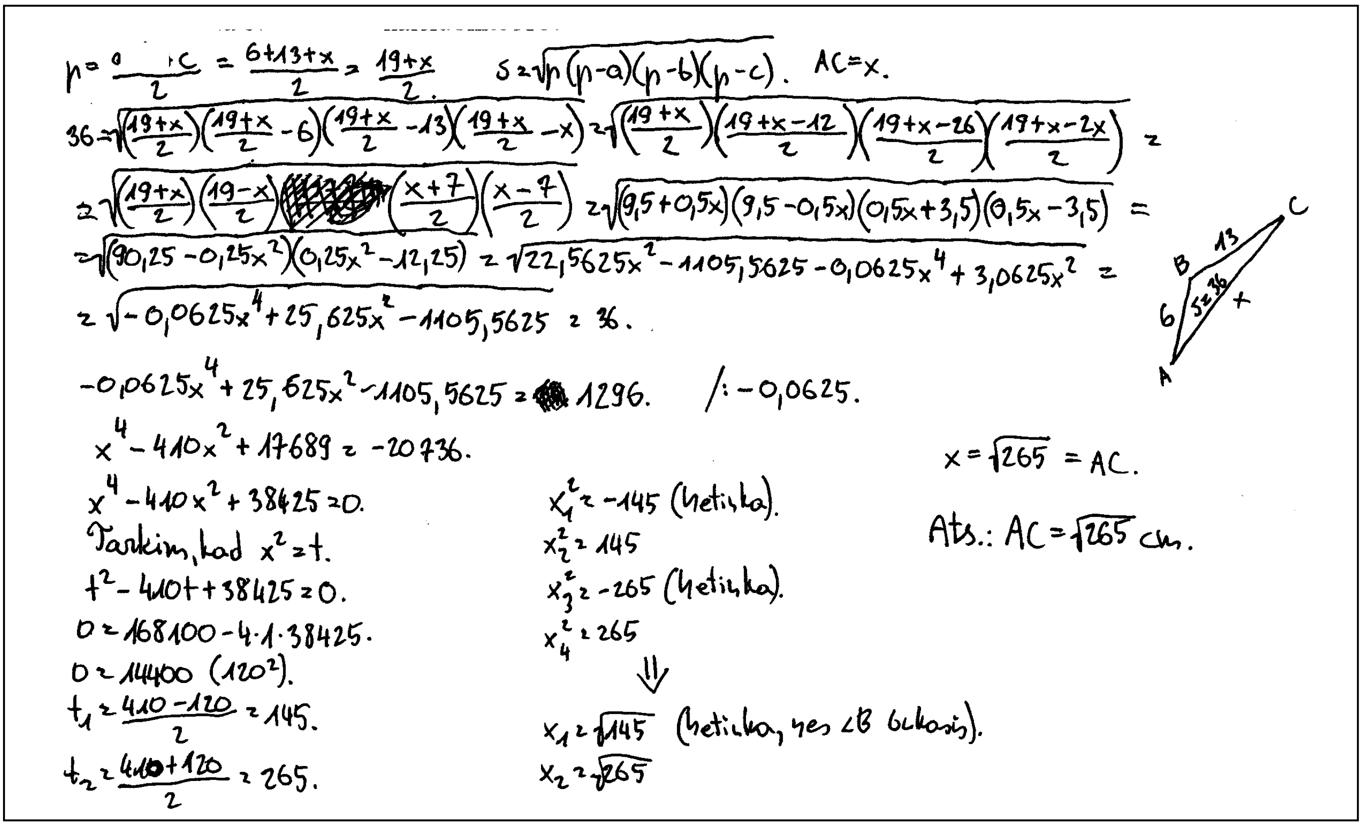
Ats.: $AC = \sqrt{265}$

20 pav. 13 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Sprendžiant šiuo būdu, naudojama sudėtingesnė trikampio ploto formulė $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta$, kurios egzamino užduoties formulių rinkinyje nėra. Po to iš trigonometrinių funkcijų sąryšio randamas kosinusas, įvertinus, jog tai bus neigiamo ženklo skaičius, nes kampas *B* yra bukasis. Ir paskiausiai, remiantis kosinusų teorema $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$, kuri taip pat nepateikta formulių rinkinyje, gaunamas atsakymas. Būtent toks sprendimo būdas aprašytas vertinimo instrukcijoje.

Šiuo būdu teisingai uždavinį išsprendė vidutiniškai aukštesnius rezultatus pasiekę dvyliktokai.

Dažniausiai pasitaikiusi klaida – nepastebėjimas, kad kampas *B* yra bukasis ir todėl kosinusas turi būti neigiamas skaičius. Susidaro įspūdis, jog dalis abiturientų nemoka išspręsti nepilnos kvadratinės lygties $x^2 = a$. (gauna tik vieną teigiamą sprendinį). Tokiems mokiniams, gavusiems tik vieną sprendinį, dėl kampo *B* didumo abejonių nekilo. Ženklo klaidą padarė daugiau nei 11 proc. šiuo būdu sprendusių mokinių.



$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6+13+x}{2}=\frac{19+x}{2}$. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $AC=x$.

$36=\sqrt{\left(\frac{19+x}{2}\right)\left(\frac{19+x}{2}-6\right)\left(\frac{19+x}{2}-13\right)\left(\frac{19+x}{2}-x\right)}=\sqrt{\left(\frac{19+x}{2}\right)\left(\frac{19+x-12}{2}\right)\left(\frac{19+x-26}{2}\right)\left(\frac{19+x-2x}{2}\right)}=$

$=\sqrt{\left(\frac{19+x}{2}\right)\left(\frac{19-x}{2}\right)\left(\frac{x+7}{2}\right)\left(\frac{x-7}{2}\right)}=\sqrt{(9{,}5+0{,}5x)(9{,}5-0{,}5x)(0{,}5x+3{,}5)(0{,}5x-3{,}5)}=$

$=\sqrt{(90{,}25-0{,}25x^2)(0{,}25x^2-12{,}25)}=\sqrt{22{,}5625x^2-1105{,}5625-0{,}0625x^4+3{,}0625x^2}=$

$=\sqrt{-0{,}0625x^4+25{,}625x^2-1105{,}5625}=36.$

$-0{,}0625x^4+25{,}625x^2-1105{,}5625=1296.$ $/:-0{,}0625.$

$x^4-410x^2+17689=-20736.$

$x^4-410x^2+38425=0.$

Tarkim, kad $x^2=t$.

$t^2-410t+38425=0.$

$D=168100-4\cdot1\cdot38425.$

$D=14400\ (120^2).$

$t_1=\frac{410-120}{2}=145.$

$t_2=\frac{410+120}{2}=265.$

$x_1^2=-145$ (netinka).

$x_2^2=145$

$x_3^2=-265$ (netinka).

$x_4^2=265$

$\Downarrow$

$x_1=\sqrt{145}$ (netinka, nes $\angle B$ bukasis).

$x_2=\sqrt{265}$

$x=\sqrt{265}=AC.$

Ats.: $AC=\sqrt{265}$ cm.

21 pav. 13 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Trečias sprendimo būdas yra paremtas Herono formulės (pateikta formulių rinkinyje) taikymu. Šiuo būdu uždavinį iki galo sugebėjo išspręsti vidutiniškai aukštesnius egzamino rezultatus gavę mokiniai. Tai nenuostabu. Nors pats sprendimo būdas nėra sudėtingas, tačiau jis yra ilgas, painus, reikalaujantis atidumo – dauguma taip sprendusių neišvengė aritmetinių klaidų (žr. 22 pav.).

Paskutinis geometrijos uždavinys užduotyje buvo iš stereometrijos srities (žr. 22 pav.).

Nr. 14

Tetraedro *ABCD* visos briaunos lygios 2. Taškai *S* ir *R* atitinkamai yra briaunų *AB* ir *CD* vidurio taškai.

1. Įrodykite, kad $RS \perp CD$.

(2 taškas)

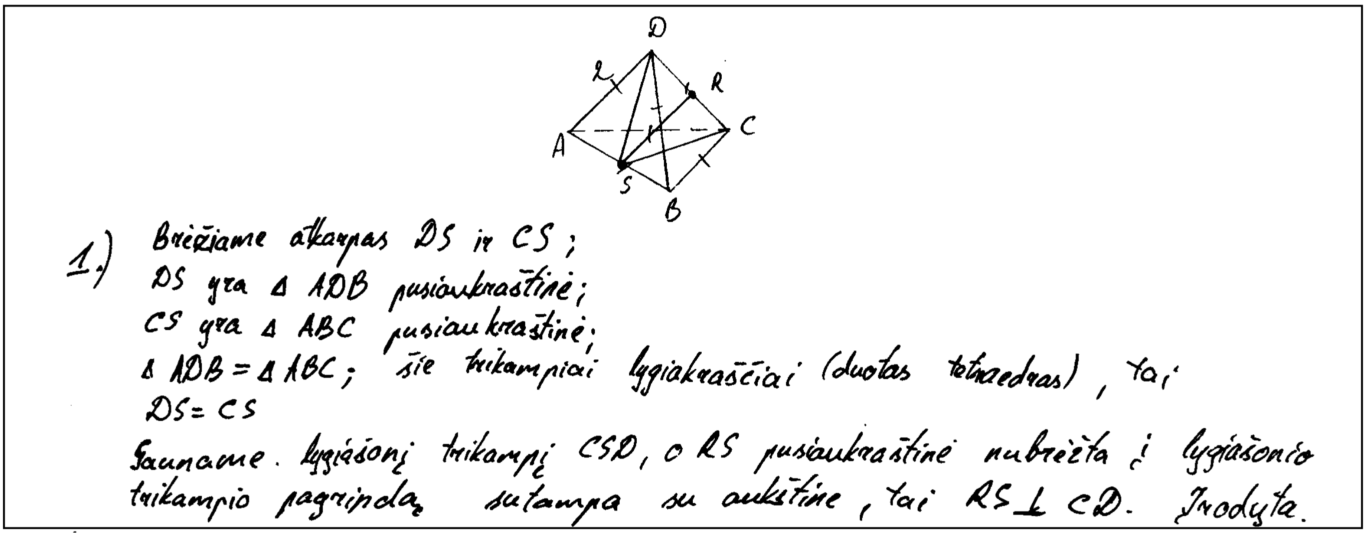
2. Apskaičiuokite *RS* ilgį.

(2 taškai)

22 pav. 14 uždavinio sąlyga

Vienas taškas buvo skiriamas už teisingai nubraižytą brėžinį. Tik trečdalis (!) dvyliktokų sugebėjo teisingai nubraižyti tetraedrą. 5 proc. mokinių vietoje tetraedro braižė keturkampę piramidę, dar 5 proc. – stačiakampį gretasienį. Dalis mokinių braižė net ne stereometrinius kūnus, o planimetrines figūras: daugiau nei 5 proc. dvyliktokų vaizdavo lygiagretainį, apie 5 proc. – stačiakampį arba kvadratą. Matyt stačiakampis, kvadratas ir lygiagretainis „atsirado“ įsivaizdavus, jog tetraedras yra keturkampė piramidė. Kadangi uždavinio sąlygoje duoti tik 4 taškai (A, B, C ir D), tai mokiniai ir vaizdavo tik piramidės pagrindą. Pasitaikė ir labai „originalių“ brėžinių – trapecijos, šešiakampės piramidės, trikampės prizmės, pasvirosios keturkampės prizmės ir net nupjautinės piramidės (taip braižė iš viso apie 3 proc. mokinių). Kiti mokiniai bandė braižyti tetraedrą, tačiau nesėkmingai. Visa tai rodo, kad stereometrinių kūnų neskyrimas ir jų vaizdavimas išlieka opi problema.

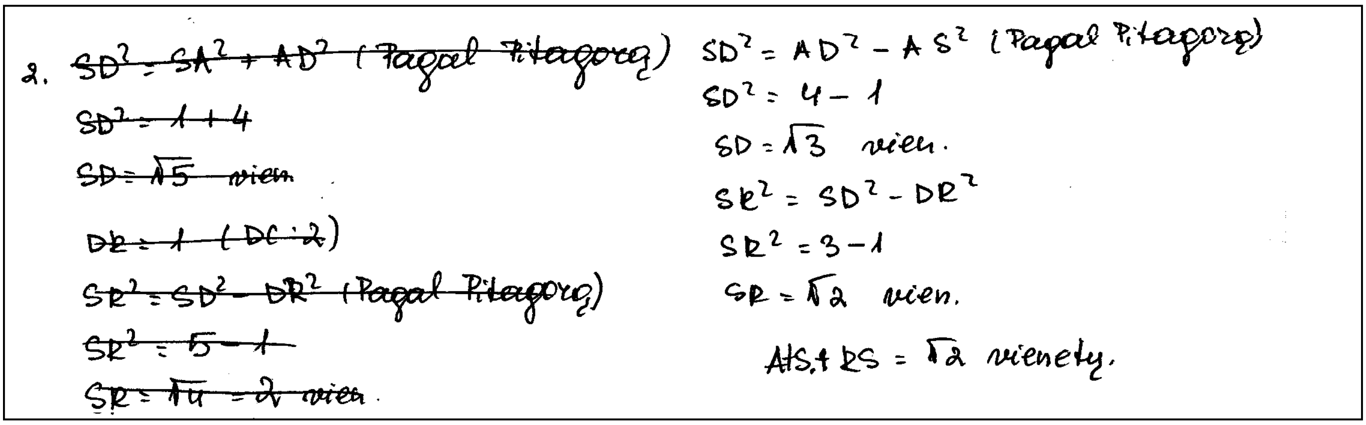
Pirmoje uždavinio dalyje buvo prašoma įrodyti dviejų atkarpų statmenumą. Įrodymo, argumentavimo gebėjimų reikalaujantys uždaviniai dažniausiai mokiniams yra sunkiau įveikiami. Mokiniams nėra lengva pastebėti sąryšius, dėsningumus, juo labiau logine seka išdėstyti pagrindimo žingsnius. Šią uždavinio dalį teisingai atliko tik 12 proc. mokinių. Įrodyti buvo galima labai paprastai. Čia pateiktas vienas iš galimų įrodymo būdų (žr. 23 pav.).



1.) Brėžiame atkarpas DS ir CS;
DS yra Δ ADB pusiaukraštinė;
CS yra Δ ABC pusiaukraštinė;
Δ ADB = Δ ABC; šie trikampiai lygiakraščiai (duotas tetraedras), tai
DS = CS
Gauname. lygiašonį trikampį CSD, o RS pusiaukraštinė nubrėžta į lygiašonio trikampio pagrindą sutampa su aukštine, tai RS ⊥ CD. Įrodyta.

23 pav. 14.1 uždavinio (užduotis įvertinta 27 taškais) sprendimas

Antroje uždavinio dalyje prašoma apskaičiuoti atkarpos ilgį. Skaičiavimai visiškai nesudėtingi, tereikia du kartus pritaikyti Pitagoro teoremą. Dauguma mokinių taip ir darė, tačiau ne visi sugebėjo Pitagoro teoremą teisingai užrašyti (matyt, neteisingai nustatė, kuris kampas yra statusis). Šią dalį teisingai išsprendė tik trečdalis mokinių, nors ji buvo tikrai nesudėtinga. Tikėtasi, jog daugiau mokinių sugebės ją įveikti. Sprendimo būdas, identiškas nurodytam vertinimo instrukcijose, pateiktas pavyzdyje (žr. 24 pav.).



2. ~~$SD^2 = SA^2 + AD^2$ (Pagal Pitagorą)~~
~~$SD^2 = 1 + 4$~~
~~$SD = \sqrt{5}$ vien~~
~~$DR = 1$ (DC : 2~~)
~~$SR^2 = SD^2 - DR^2$ (Pagal Pitagorą~~)
~~$SR^2 = 5 - 1$~~
~~$SR = \sqrt{4} = 2$ vien~~.

$SD^2 = AD^2 - AS^2$ (Pagal Pitagorą)
$SD^2 = 4 - 1$
$SD = \sqrt{3}$ vien.
$SR^2 = SD^2 - DR^2$
$SR^2 = 3 - 1$
$SR = \sqrt{2}$ vien.
Ats.: $RS = \sqrt{2}$ vienetų.

24 pav. 14.2 uždavinio (užduotis įvertinta 36 taškais) sprendimo pavyzdys

FUNKCIJOS IR ANALIZĖS PRADMENYS

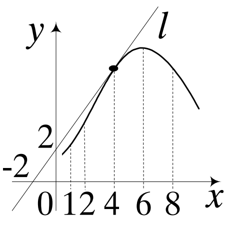
Tai tradicinė matematikos mokymo sritis. Mokytojai jau yra igyję pakankamai patirties ją dėstydami, o mokymo priemonėse pateikiama daug įvairiausių uždavinių. 2004 metų matematikos valstybinio brandos egzamino užduotyje funkcijų ir analizės pradmenų 3, 5, 10, 15, 16, 17 ir 18 uždaviniai yra ne visai tradiciškai suformuluoti, nors ir gerokai paprastesni už tuos, kuriuos mokiniai atlikdavo per pamokas, nes naujuose vadovėliuose gausu daug sudėtingesnių uždavinių. Matyt todėl beveik visi laikiusieji egzaminą bandė šiuos uždavinius spręsti. Deja, rezultatai nėra džiuginantys. Dauguma uždavinių buvo tikrinamas mokinių supratimas, o ne gebėjimas taikyti sudėtingą algoritmą, kuriems kol kas daugiausia laiko skiriama baigiamųjų klasių matematikos pamokose.

Kaip ir praeitais metais, geriausiai mokiniai sprendė uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais.

Aptarkime konkrečių uždavinių sprendimo rezultatus.

Nr. 3

Paveiksle pateiktas funkcijos $y = f(x)$ grafiko eskizas. Liestinė *l* nubrėžta per tašką, kurio abscisė lygi 4. Kuris iš žemiau pateiktų teiginių yra klaidingas?



A $f'(6) = 0$

B $f'(4) = 1$

C Kai $x \in (1; 4)$, tai $f'(x) > 0$

D Kai $x \in (6; 8)$, tai $f'(x) < 0$

E Kai $x \in (4; 6)$, tai $f'(x) < 0$

26 pav. 3 uždavinio sąlyga

Spręsdami 26 paveiksle pateiktą uždavinį, mokiniai turėjo atkreipti dėmesį į tai, kad prašoma nurodyti klaidingą atsakymą. Matyt, jiems tai buvo netikėta, nes tik pusė laikiusiųjų pasirinko teisingą atsakymą. Situacija galėjo būti kitokia, jeigu uždavinio sąlygoje žodis *klaidingas* būtų išskirtas (pvz., šriftu). Šis uždavinys Lietuvos abiturientams buvo vidutinio sunkumo. Juo buvo tikrinama, ar mokiniai supranta funkcijos išvestinės ir jos grafiko lietinės sąsajas. Uždavinys neatskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusių mokinių (skiriamoji geba – 33 proc.).

Nr. 5

Nurodykite teisingą teiginį.

Funkcija $f(x) = 3 \cdot 2^x$:

A yra teigiama tik tada, kai $x > 0$

B monotoniškai mažėja visoje skaičių tiesėje

C yra teigiama su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x = 0$

D monotoniškai didėja visoje skaičių tiesėje

E tenkina sąlygą $f(x) = (3 \cdot 2)^x$

27 pav. 5 uždavinio sąlyga

Penktuoju numeriu pažymėtas uždavinys mokiniams buvo labai lengvas. Daugiau nei 80 proc. laikiusiųjų pasirinko teisingą atsakymą. Vadinasi, jie žinojo rodiklinės funkcijos savybes, nors neatmestina ir spėjimo galimybė. Keista, kad net 8 proc. rinkosi atsakymą **C** – matyt, labai patrauklus pasirodė teiginys „su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x = 0$“.

Sprendžiant kitus šios srities uždavinius, mokiniai turėjo užrašyti jų sprendimus.

Nr. 10

Raskite funkcijų $y = \log_2 x$ ir $y = 5 - \log_2 (x + 4)$ grafikų susikirtimo taško ordinatę.

(4 taškai)

28 pav. 10 uždavinio sąlyga

10 uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

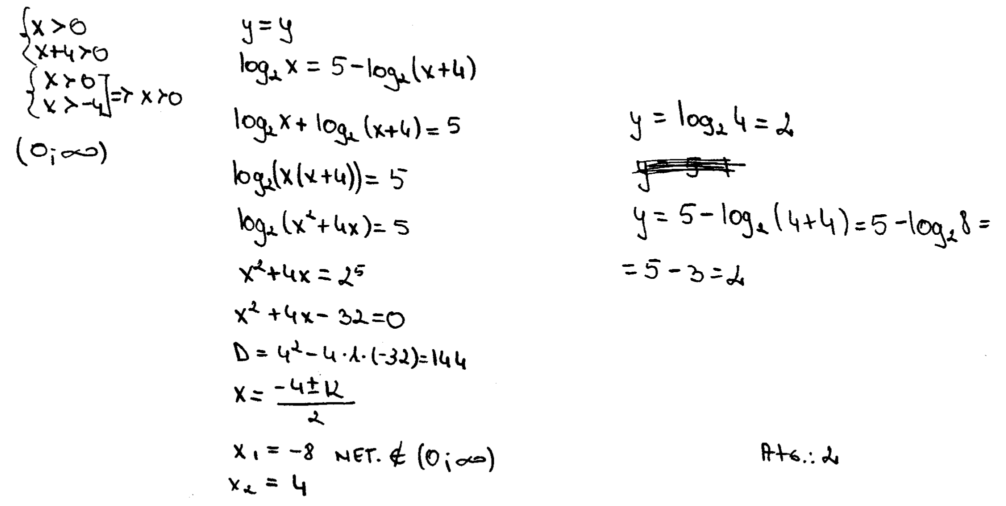
Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
10		**4**	
	$\log_2 x = 5 - \log_2(x+4)$; $x^2 + 4x - 32 = 0$;	• 1	Už teisingai sudarytą logaritminę lygtį ir jos pakeitimą kvadratine.
	$x_1 = -8$ (netinka a. s.); $x_2 = 4$;	• 1	Už teisingai išspręstą kvadratinę lygtį.
	$y = \log_2 4 = 2$.	• 1	Už gautą teisingą x.
	Ats.: 2.	• 1	Už teisingą atsakymą.

Pastaba. Jei sprendžiama grafiniu būdu, tai *1 taškas* skiriamas už teisingą funkcijos $y = \log_2 x$ grafiko eskizą, *1 taškas* skiriamas už teisingą funkcijos $y = 5 - \log_2(x+4)$ grafiko eskizą, *1 taškas* – už parodymą, kad kitų susikirtimo taškų nėra, *1 taškas* – už teisingą atsakymą.

29 pav. 10 uždavinio vertinimo instrukcija

Tai vidutinio sunkumo uždavinys, kuris labai gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai užduotį atlikusius mokinius ir puikiai koreliavo su visa užduotimi. Apie 40 proc. mokinių gavo 0 taškų įvertinimą, o apie 35 proc. – iki galo išsprendė šį uždavinį. Net 18 proc. mokinių prarado vieną tašką, nes apskaičiavę funkcijų grafikų susikirtimo taško abscisę, pamiršo apskaičiuoti jo ordinatę. Įdomu pastebėti, kad kai kurie mokiniai šį uždavinį sprendė gerai, nors kitus uždavinius – kiek prasčiau. Būdingos klaidos – nemoka logoritmo savybių, neatidžiai perskaito sąlygą, todėl neišsprendžia viso uždavinio.

Teisingai išspręsto uždavinio pavyzdžiai pateikti 30 ir 31 paveiksluose.



$\begin{cases} x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

$(0; \infty)$

$y = y$

$\log_2 x = 5 - \log_2(x+4)$

$\log_2 x + \log_2(x+4) = 5$

$\log_2(x(x+4)) = 5$

$\log_2(x^2+4x) = 5$

$x^2+4x = 2^5$

$x^2+4x-32=0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$

$x = \frac{-4 \pm 12}{2}$

$x_1 = -8$ NET. $\notin (0; \infty)$

$x_2 = 4$

$y = \log_2 4 = 2$

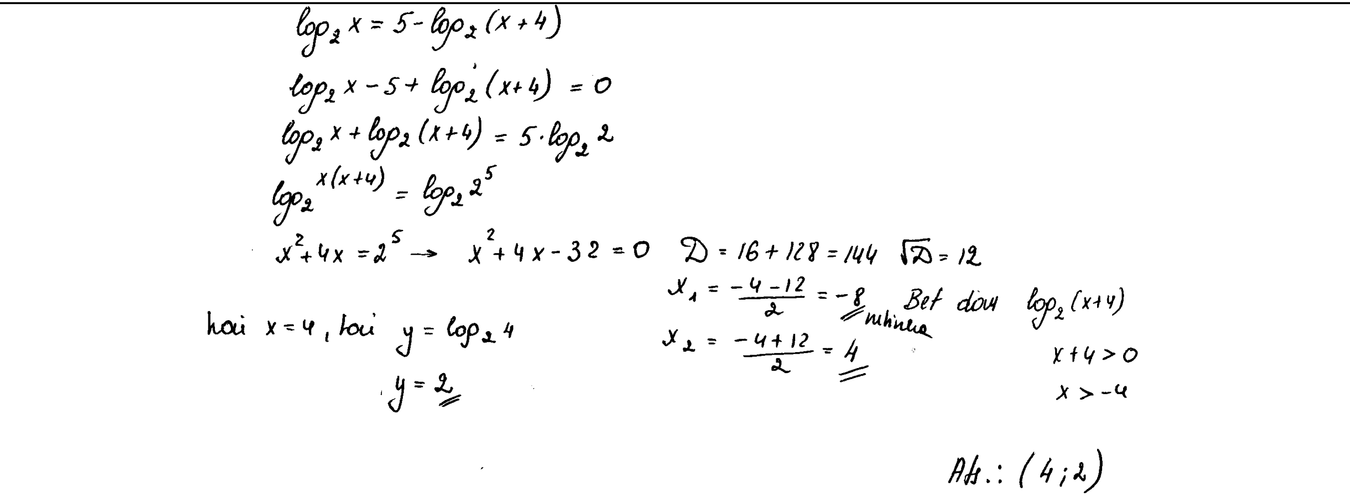
~~$y = 5 +$~~

$y = 5 - \log_2(4+4) = 5 - \log_2 8 =$

$= 5 - 3 = 2$

Ats.: 2

30 pav. 10 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



$\log_2 x = 5 - \log_2(x+4)$

$\log_2 x - 5 + \log_2(x+4) = 0$

$\log_2 x + \log_2(x+4) = 5 \cdot \log_2 2$

$\log_2 {}^{x(x+4)} = \log_2 2^5$

$x^2+4x = 2^5 \to x^2+4x-32=0$ $D = 16+128 = 144$ $\sqrt{D} = 12$

$x_1 = \frac{-4-12}{2} = -8$ netinka Bet duo $\log_2(x+4)$

$x_2 = \frac{-4+12}{2} = 4$

$x+4 > 0$

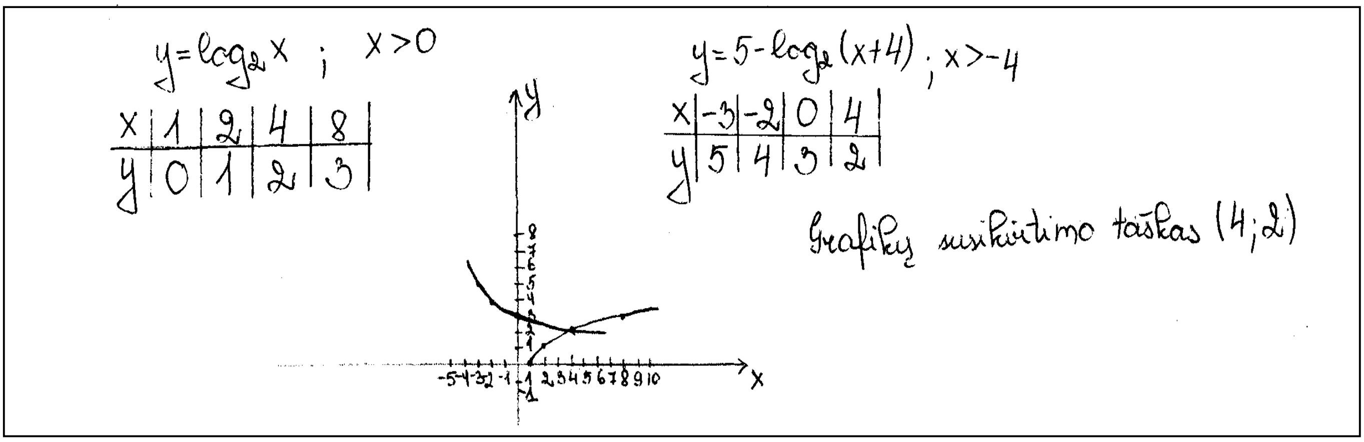
$x > -4$

kai $x = 4$, tai $y = \log_2 4$

$y = 2$

Ats.: $(4; 2)$

31 pav. 10 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



$y=\log_2 x$; $x>0$

x	1	2	4	8
y	0	1	2	3

$y=5-\log_2(x+4)$; $x>-4$

x	-3	-2	0	4
y	5	4	3	2

Grafikų susikirtimo taškas (4;2)

32 pav. 10 uždavinio neišsamaus sprendimo pavyzdys

Iš pateiktų sprendimo pavyzdžių matome, kad buvo mėginta šį uždavinį spręsti grafiniu būdu, tačiau kai kurie mokiniai, nubraižę grafikų eskizus, nesirėmė funkcijų savybėmis ir neparodė, kad kitų susikirtimo taškų nėra. Šie trūkumai matyti 32 paveiksle pateiktame pavyzdyje. Šiuo būdu sprendusieji neretai užmiršdavo, ko buvo prašoma uždavinyje, t. y. vietoje ordinatės nurodydavo susikirtimo taško koordinates. Tokių uždavinių gana dažnai pasitaiko valstybinių ir mokyklinių egzaminų užduotyse, jų nestinga ir įvairiose mokymo priemonėse. Mokytojai turėtų mokiniams paaiškinti, kada lygtis reikėtų spręsti grafiniu būdu (pavyzdžiui, kai reikia nustatyti sprendinių skaičių) ir kaip, sprendžiant grafiniu būdu, reikia pagrįsti, jog daugiau sprendinių nėra.

Nr. 15

Duota funkcija $f(x)=-2x+4$.

1. Raskite funkcijos $f(x)$ tą pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką (2; 1).

(2 taškai)

2. Apskaičiuokite kreivinės trapecijos, kurią riboja gautosios pirmykštės funkcijos grafikas bei ašis *Ox*, plotą.

(3 taškai)

33 pav. 15 uždavinio sąlyga

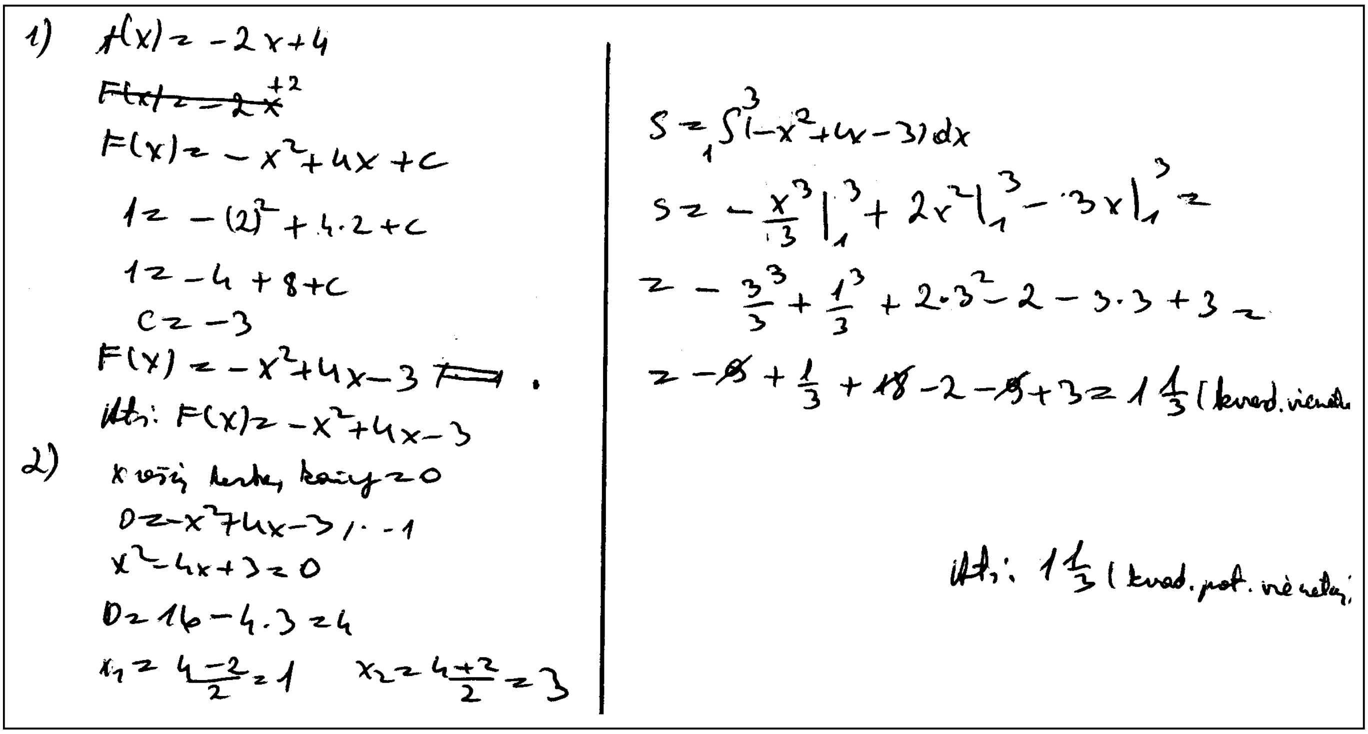
Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	**Sprendimas**	**Taškai**	**Paaiškinimai**
15		**5**	
1	$F(x)=\int(-2x+4)dx=-x^2+4x+C$, $-4+8+C=1$, $C=-3$. *Ats.:* $F(x)=-x^2+4x-3$.	• 1 • 1	Už teisingai apskaičiuotą $F(x)$. Už gautą teisingą atsakymą.
2	$-x^2+4x-3=0$, $x_1=1$; $x_2=3$. $S=\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx=$ $=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big\vert_1^3=1\frac{1}{3}$. *Ats.:* $S=1\frac{1}{3}$.	• 1 • 1 • 1	Už teisingai apskaičiuotus rėžius. Už teisingai suintegruotą funkciją. Už teisingą atsakymą.

34 pav. 15 uždavinio vertinimo instrukcija

15 uždavinys yra tradicinis. Nemažai tokių uždavinių yra vadovėliuose ir kitose mokymo priemonėse. Dėstant matematikos kursą pagal naująsias programas, integralų tema nagrinėjama paskutinė. Gal todėl abiturientams šis uždavinys nebuvo sudėtingas. Apie 44 proc. mokinių teisingai išsprendė pirmąją uždavinio dalį. Geriausiai atlikę visą užduotį mokiniai puikiai atsiskyrė nuo prasčiausiai sprendusiųjų. Šio uždavinio sprendimuose į akis ypač krito tai, kad mokiniai nemoka užrašyti sprendimų, netinkamai vartoja matematinę simboliką (daug darbų, kuriuose nėra nei integralo simbolio, nei pirmykštės funkcijos, o *dx* labai dažnai praleidžiamas). Susidaro įspūdis, kad kažką girdėjęs, tačiau menkai supratęs mokinys bando išsisukti. Pagrindinės klaidos – neapibrėžtinis integralas skaičiuojamas be konstantos C, įrašant taško koordinates abscisė painiojama su ordinate.

Šio uždavinio teisingo sprendimo pavyzdys pateiktas 35 paveiksle.



1) $f(x) = -2x+4$

~~$F(x) = -2x^{+2}$~~

$F(x) = -x^2+4x+c$

$1 = -(2)^2+4\cdot 2+c$

$1 = -4+8+c$

$c = -3$

$F(x) = -x^2+4x-3$.

Ats: $F(x) = -x^2+4x-3$

2) x ašį kerta, kai $y = 0$

$0 = -x^2+4x-3 \,/\cdot -1$

$x^2-4x+3 = 0$

$D = 16-4\cdot 3 = 4$

$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

$S = \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$

$S = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 2x^2\Big|_1^3 - 3x\Big|_1^3 =$

$= -\frac{3^3}{3}+\frac{1^3}{3}+2\cdot 3^2-2-3\cdot 3+3 =$

$= -\cancel{9}+\frac{1}{3}+\cancel{18}-2-\cancel{9}+3 = 1\frac{1}{3}$ (kvad.vienet.

Ats: $1\frac{1}{3}$ (kvad.pot. vienetų

35 pav. 15 uždavinio sprendimo pavyzdys

Antroji šio uždavinio dalis mokiniams buvo gana sudėtinga. Čia skaičiuojant kreivinės trapecijos plotą reikėjo taikyti integralus. Šią uždavinio dalį teisingai išsprendė kas ketvirtas abiturientas. Gana dažnos neatidumo klaidos: praleidžiama reiškinio dalis, skaičiai, neapskliausta, integruojant vietoj viršutinio rėžio imama parabolės viršūnės abscisė, o kreivinės trapecijos plotas nedauginamas iš 2. Ir vėl nesugebėta pasitelkti tinkamus matematikos terminus ir simboliką.

Nr. 16

1. Įrodykite, kad $2\cos 2x - \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x$. *(1 taškas)* **2.** Išspręskite lygtį $2\cos 2x - \cos^2 x = 2\sin x$, kai $x \in [0^\circ; 360^\circ]$. *(4 taškai)*

36 pav. 16 uždavinio sąlyga

Pirmoji šio uždavinio dalis buvo vidutinio sunkumo. Ją teisingai išsprendė 55 proc. mokinių. Puikiai atsiskyrė geriausiai visą užduotį atlikę mokiniai nuo prasčiausiai sprendusiųjų. Nors įrodymas buvo nesudėtingas, tačiau beveik pusė mokinių buvo įvertinti 0 taškų. Gal gąsdino žodis „įrodykite“.

Uždavinio antroji dalis buvo vertinama remiantis tokia vertinimo instrukcija (žr. 37 pav.).

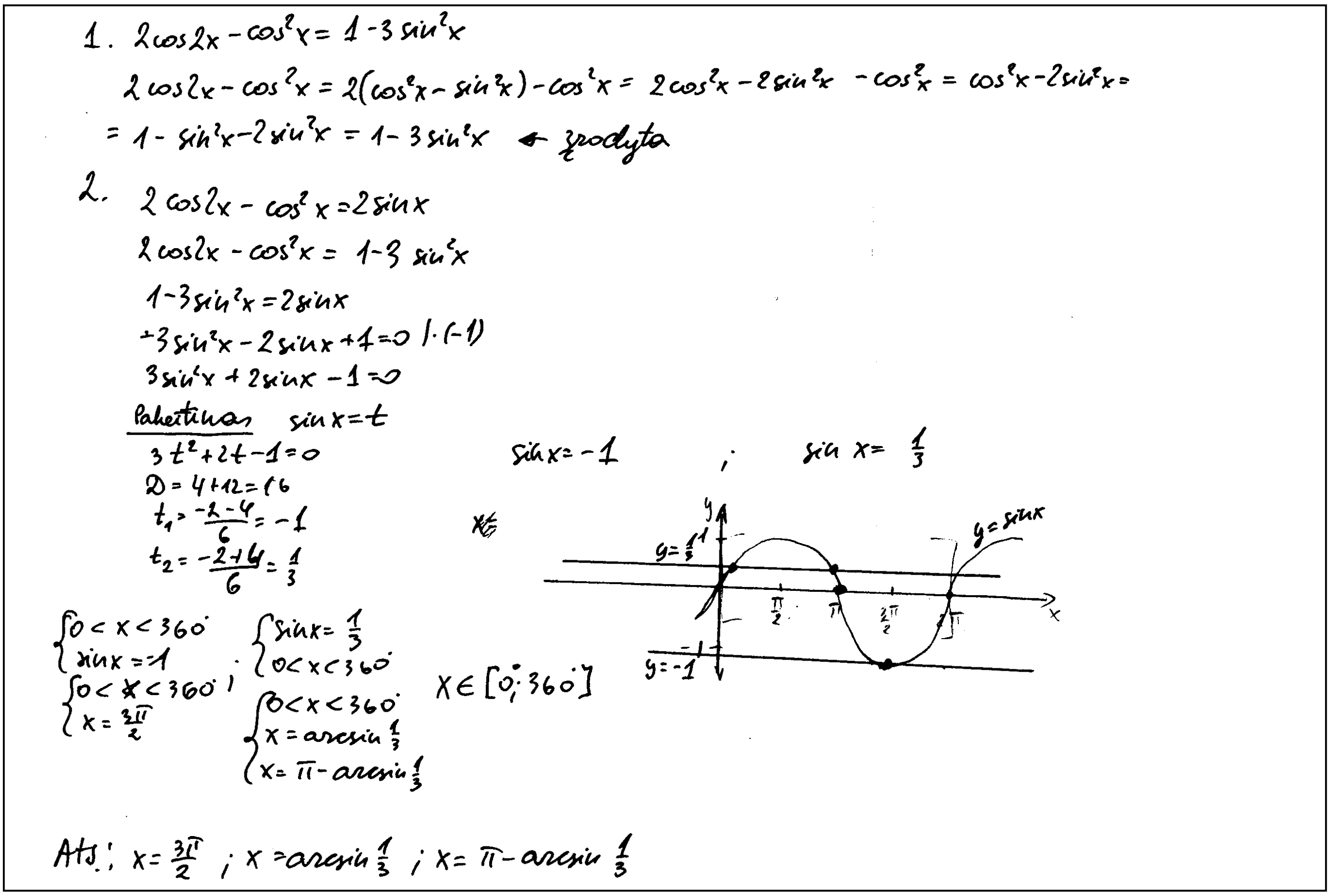
Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
16		**5**	
2	*Pirmas sprendimo būdas* $1-3\sin^2 x=2\sin x$; $\sin x=y$, $y\in[-1;1]$. $3y^2+2y-1=0$, $y_1=\frac{1}{3}$, $y_2=-1$;	• 1	Už teisingai išspręstą kvadratinę lygtį.
	$y_1=\frac{1}{3}$, $\sin x=-1$; $x_1=\arcsin\frac{1}{3}$,		Už teisingą x_1 reikšmę.
	$x_2=180^\circ-\arcsin\frac{1}{3}$,	• 1	Už teisingą x_2 reikšmę.
	$x_3=270^\circ$.	• 1	Už teisingą x_3 reikšmę.
	Ats.: $\arcsin\frac{1}{3}$, $180^\circ-\arcsin\frac{1}{3}$, 270°.	• 1	
	Antras sprendimo būdas Sprendimas taikant bendrąsias sprendinių išraiškas	• 1	Už teisingai išspręstą kvadratinę lygtį.
		• 1	Už teisingą lygties $y_1=\frac{1}{3}$ bendrąją sprendinio formulę.
		• 1	Už teisingas x_1 ir x_2 reikšmes.
		• 1	Už teisingą lygties $\sin x=-1$ bendrąją sprendinio formulę ir x_3 reikšmę.

Pastaba. Priklausomai nuo sprendimo būdo – jei iš karto rašomi atskiri sprendiniai, taikome pirmojo sprendimo būdo instrukciją.

37 pav. 16 uždavinio antros dalies vertinimo instrukcija

Spręsdami antrąją dalį mokiniai galėjo remtis pirmosios dalies įrodymu. Deja, dauguma mokinių iš naujo kartojo įrodymą (net ir daug taškų surinkę mokiniai). Daug buvo ir tokių, kurie taip ir nesugebėjo pertvarkyti trigonometrinės lygties į kvadratinę, nors buvo išsprendę pirmą uždavinio dalį (!). Dalis mokinių, teisingai pertvarkiusių lygtį į kvadratinę ir gavusių dvi paprasčiausias trigonometrines lygtis, spręsdami darė tokias klaidas: rašė neteisingą periodą, nemokėjo išrinkti sprendinių iš nurodyto intervalo. Formaliai tai atlikti buvo sunkoka, nes daug mokinių nemokėjo įvertinti $\arcsin\frac{1}{3}$ didumo. Šiuo atveju paprasčiau buvo naudotis funkcijų: $y=\sin x$, $y=\frac{1}{3}$, $y=-1$ grafikais (žr. 38 pav.) arba vienetiniu apskritimu (žr. 39 pav.).

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai pateikti 38, 39 ir 40 paveiksluose.



1\. $2\cos 2x - \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$2\cos 2x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos^2 x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x - 2\sin^2 x =$

$= 1 - \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$ ← įrodyta

2\. $2\cos 2x - \cos^2 x = 2\sin x$

$2\cos 2x - \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$1 - 3\sin^2 x = 2\sin x$

$-3\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$

Pakeitimas $\sin x = t$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$t_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$

$t_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$\sin x = -1$; $\sin x = \frac{1}{3}$

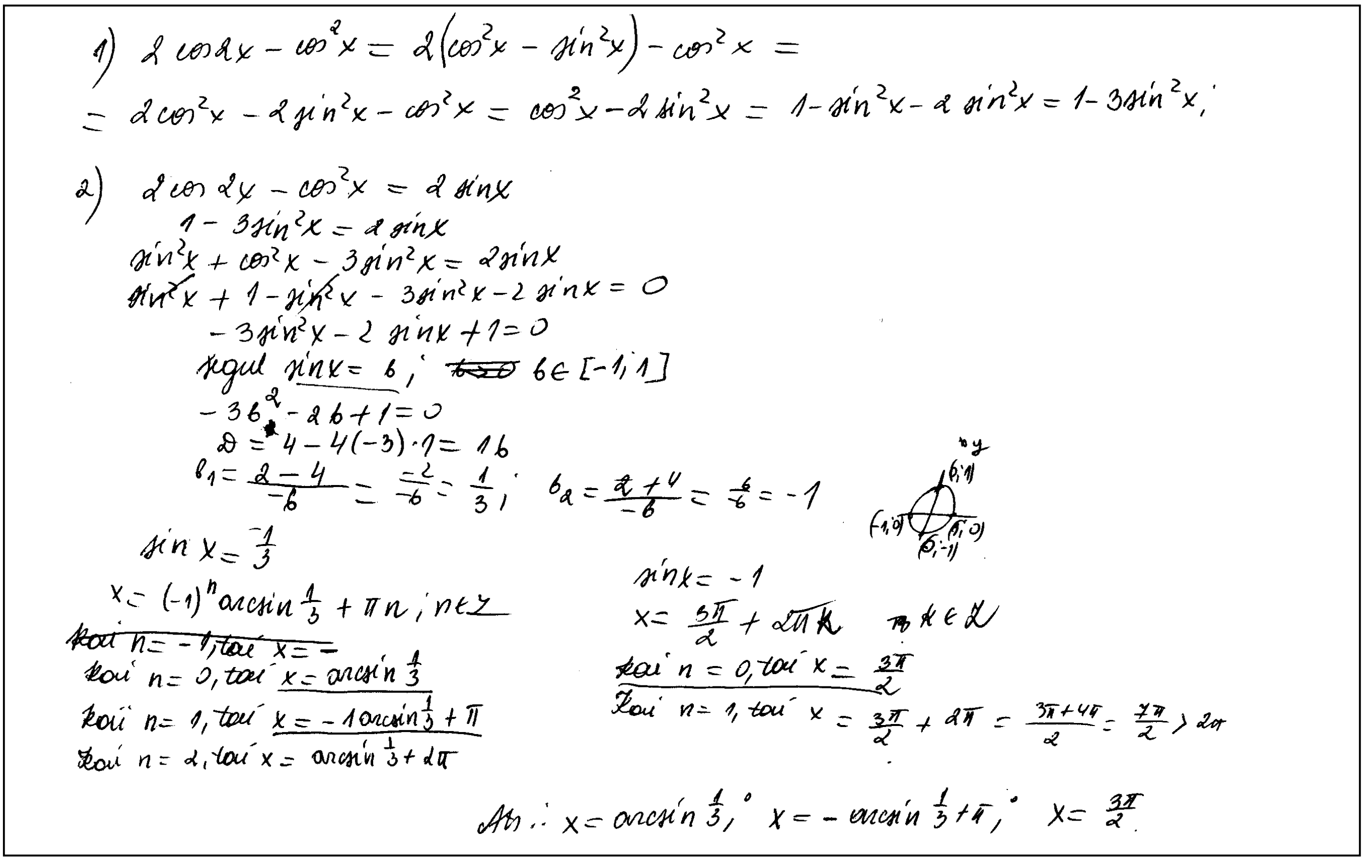
~~$x \in$~~

$\begin{cases} 0 < x < 360° \\ \sin x = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3} \\ 0 < x < 360° \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 360° \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 360° \\ x = \arcsin\frac{1}{3} \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} \end{cases}$ $x \in [0°; 360°]$

Ats.: $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \arcsin\frac{1}{3}$; $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3}$

38 pav. 16 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



1) $2\cos 2x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos^2 x =$

$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x - 2\sin^2 x = 1 - \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$;

2) $2\cos 2x - \cos^2 x = 2\sin x$

$1 - 3\sin^2 x = 2\sin x$

$\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin^2 x = 2\sin x$

$\sin^2 x + 1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$-3\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$

jeigu $\sin x = b$; ~~$b \geq 0$~~ $b \in [-1; 1]$

$-3b^2 - 2b + 1 = 0$

$D = 4 - 4(-3) \cdot 1 = 16$

$b_1 = \frac{2-4}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$; $b_2 = \frac{2+4}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$

$\sin x = \frac{1}{3}$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$

~~kai $n = -1$, tai $x =$~~

kai $n = 0$, tai $x = \arcsin\frac{1}{3}$

kai $n = 1$, tai $x = -1\arcsin\frac{1}{3} + \pi$

kai $n = 2$, tai $x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi$

$\sin x = -1$

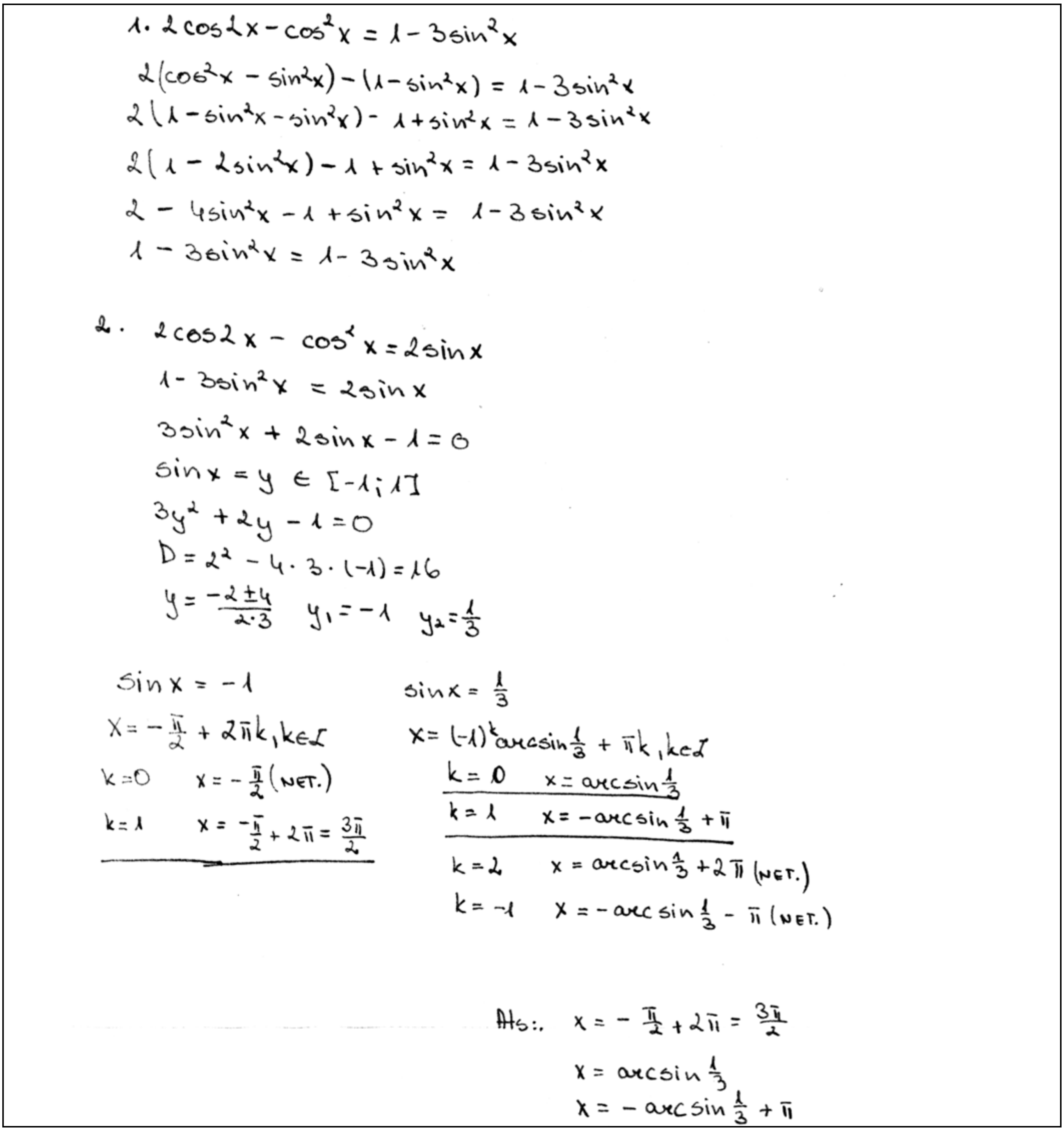
$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ $k \in Z$

kai $n = 0$, tai $x = \frac{3\pi}{2}$

kai $n = 1$, tai $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi + 4\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} > 2\pi$

Ats.: $x = \arcsin\frac{1}{3}$; $x = -\arcsin\frac{1}{3} + \pi$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

39 pav. 16 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



1. $2\cos 2x - \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - (1 - \sin^2 x) = 1 - 3\sin^2 x$

$2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) - 1 + \sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$2(1 - 2\sin^2 x) - 1 + \sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$2 - 4\sin^2 x - 1 + \sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

$1 - 3\sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x$

2. $2\cos 2x - \cos^2 x = 2\sin x$

$1 - 3\sin^2 x = 2\sin x$

$3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = y \in [-1; 1]$

$3y^2 + 2y - 1 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$

$y = \frac{-2 \pm 4}{2 \cdot 3}$ $y_1 = -1$ $y_2 = \frac{1}{3}$

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$k = 0$ $x = -\frac{\pi}{2}$ (NET.)

$k = 1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

$\sin x = \frac{1}{3}$

$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

$k = 0$ $x = \arcsin\frac{1}{3}$

$k = 1$ $x = -\arcsin\frac{1}{3} + \pi$

$k = 2$ $x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi$ (NET.)

$k = -1$ $x = -\arcsin\frac{1}{3} - \pi$ (NET.)

Ats.: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

$x = \arcsin\frac{1}{3}$

$x = -\arcsin\frac{1}{3} + \pi$

40 pav. 16 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Nr.17

Duota funkcija $y = x^2 - 4$, kai $x \in (-\infty; 0]$.

1. Parodykite, kad jos atvirkštinė funkcija yra $y = -\sqrt{x+4}$, kai $x \in [-4; +\infty)$.

(2 taškai)

2. Raskite funkcijos $y = -\sqrt{x+4}$ ir pirmojo bei trečiojo ketvirčio pusiaukampinės susikirtimo taškų koordinates.

(3 taškai)

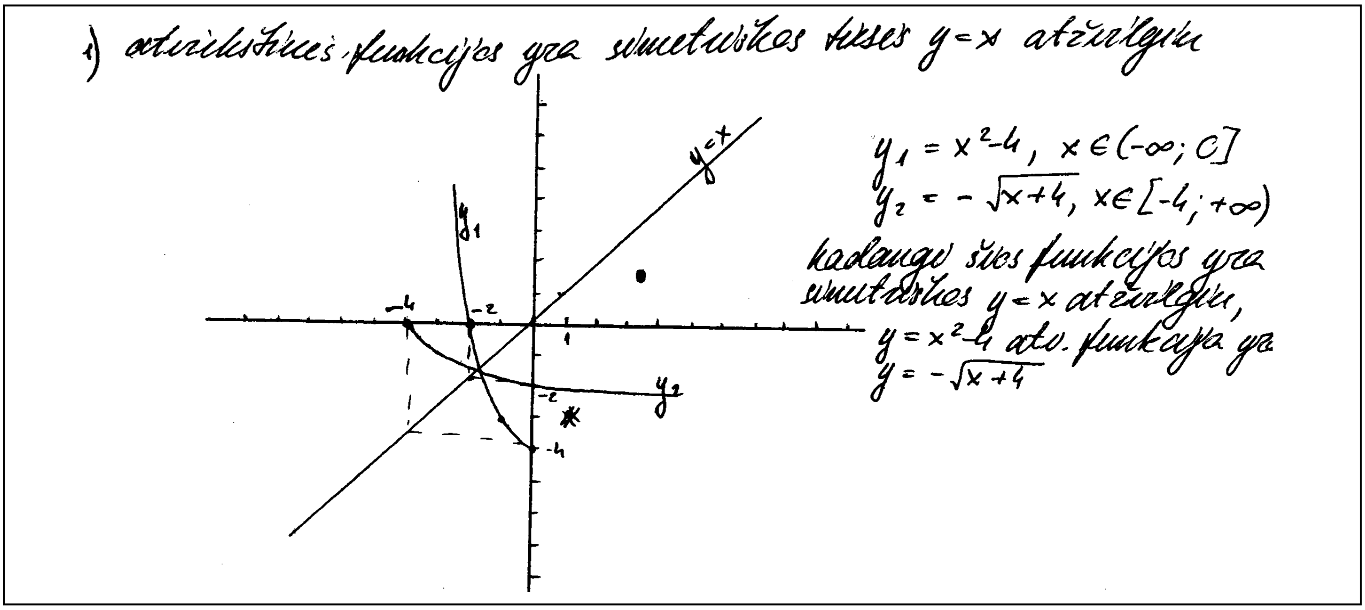
41 pav. 17 uždavinio sąlyga

17 uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
17		**5**	
1	$x^2 = y + 4$, $x = \pm\sqrt{y+4}$, $x \in (-\infty; 0]$: $x = -\sqrt{y+4}$, $y = -\sqrt{x+4}$.	• 1 • 1	Už teisingai išreikštą x. Už teisingą atsakymą.
2	$-\sqrt{x+4} = x$, $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$. $x \in (-\infty; 0]$, $x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$. *Ats.:* $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.	• 1 • 1 • 1	Už teisingą lygybę. Už gautus teisingus x_1 ir x_2. Už teisingą atsakymą.

42 pav. 17 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai pateikti 43 ir 44 paveiksluose.



1) atvirkštinės funkcijos yra simetriškos tiesės $y = x$ atžvilgiu

$y_1 = x^2-4$, $x \in (-\infty; 0]$

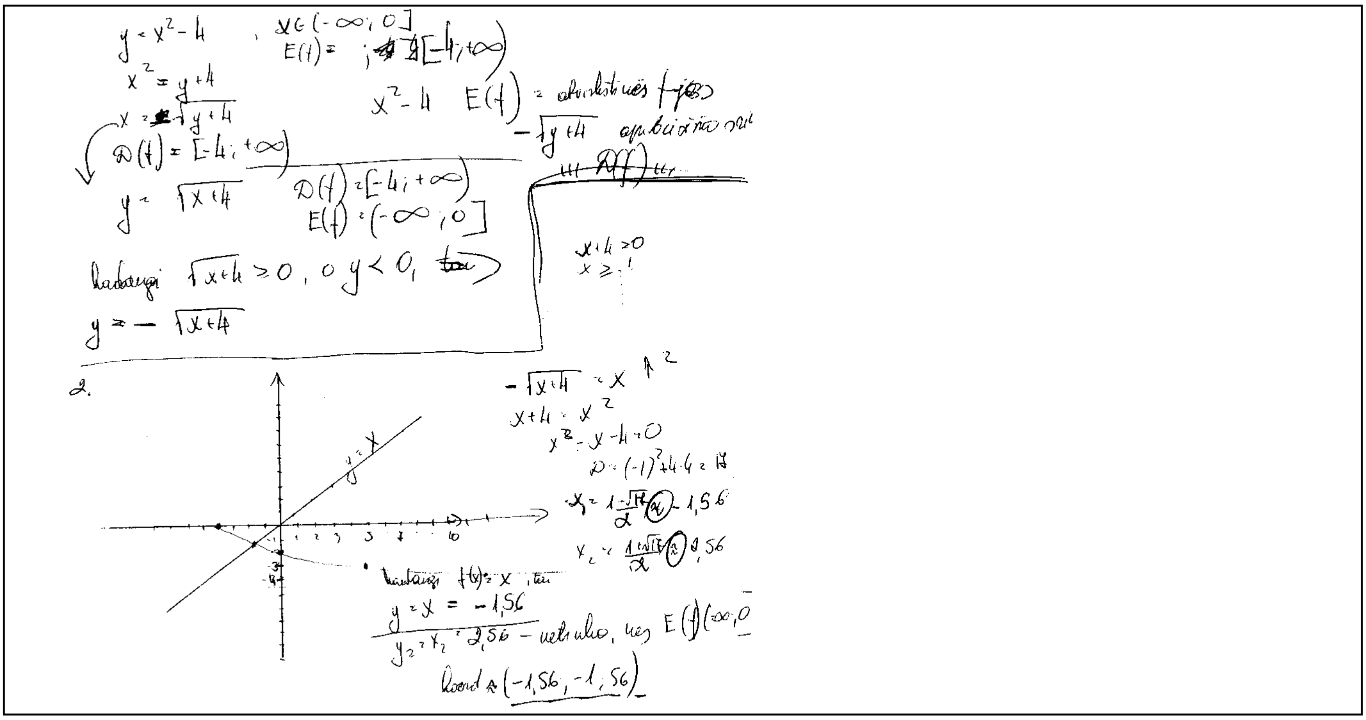
$y_2 = -\sqrt{x+4}$, $x \in [-4; +\infty)$

kadangi šios funkcijos yra simetriškos $y = x$ atžvilgiu, $y = x^2-4$ atv. funkcija yra $y = -\sqrt{x+4}$

43 pav. 17 uždavinio 1-osios dalies sprendimo pavyzdys

Tai vienas iš sunkiausių uždavinių. Jis buvo priešpaskutinis, todėl nestebina, kad beveik pusė mokinių jo visai nesprendė. Kita vertus, buvo ir tokių, kurie kitų uždavinių nesprendė, o šį spręsti bandė. Tai uždavinys, kuris labai gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai užduotį atlikusius mokinius ir puikiai koreliavo su visa užduotimi.

Pirmąją uždavinio dalį teisingai išsprendė šiek tiek mažiau negu trečdalis mokinių, o apie 17 proc. buvo įvertinti vienu tašku. Užduotis sunki, todėl mokinių rezultatai nestebina. Kaip matyti iš pateiktų pavyzdžių, kai kurie mokiniai bandė remtis faktu, jog funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. (Šiais grafikais jie rėmėsi ir antrojoje dalyje, atmesdami sprendinį, nepriklausantį apibrėžimo sričiai.) Kiti mokiniai uždavinius sprendė algebriniu būdu. Antroji uždavinio dalis mokiniams buvo sunkesnė už pirmąją. Ją teisingai atliko tik šiek tiek daugiau nei dešimtadalis egzaminą laikiusių mokinių, net 60 proc. buvo įvertinti 0 taškų. Dauguma mokinių nesugebėjo sudaryti iracionaliąją lygtį (gal pamiršo tiesės – pirmojo ir trečiojo ketvirčių pusiaukampinės lygtį). Dažniausiai pasitaikiusios klaidos: rašomi apytiksliai sprendiniai, apskaičiuojama tik susikirtimo taško abscisė, o ordinatė pamirštama. Net ir viską teisingai apskaičiavę, mokiniai nemoka parašyti atsakymo. Atsakyme rašo apytiksles reikšmes ir dėl to praranda 1 tašką (žr. 44 pav.).


$y = x^2 - 4$, $x \in (-\infty; 0]$

$E(f) = [-4; +\infty)$

$x^2 = y + 4$

$x^2 - 4$ $E(f)$ = atvirkštinės f-jos

$-\sqrt{y+4}$ apibrėžimo sriti

$x = \sqrt{y+4}$

$D(f) = [-4; +\infty)$

$y = \sqrt{x+4}$

$D(f) = [-4; +\infty)$

$E(f) = (-\infty; 0]$

kadangi $\sqrt{x+4} \geq 0$, o $y < 0$, tai

$y = -\sqrt{x+4}$

$x+4 \geq 0$

$x \geq$

2.

$-\sqrt{x+4} = x$ $\uparrow^2$

$x+4 = x^2$

$x^2 - x - 4 = 0$

$D = (-1)^2 + 4 \cdot 4 = 17$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \approx -1{,}56$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \approx 2{,}56$

kadangi $f(x) = x$, tai

$y = x = -1{,}56$

$y_2 = x_2 = 2{,}56$ – netinka, nes $E(f)(-\infty; 0]$

koord $A(-1{,}56; -1{,}56)$

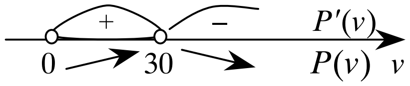
44 pav. 17 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Nr. 18

Pirklys Vakarų uoste už 1500 aukso monetų pasamdė laivą, kuris turi nuplukdyti jo prekes į vietovę, nutolusią nuo Vakarų uosto 1000 km atstumu. Su laivo savininku jis sutarė, kad šis už kiekvieną kelyje išbūtą valandą grąžins pirkliui po 9 auksines monetas. Tariama, kad visą kelią laivas plauks pastoviu greičiu. Kai šis greitis lygus v km/h, tai kelio gale laivo savininkas privalo laivo komandai išmokėti premiją, lygią $10v$ auksinių monetų. Kokiu greičiu turi plaukti laivas, kad laivo savininko pelnas būtų maksimalus? Kam lygus šis pelnas?

(6 taškai)

45 pav.18 uždavinio sąlyga.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
18		6	
	Pirkliui reikia grąžinti $\frac{9 \cdot 1000}{v}$.	• 1	Už teisingą pirkliui grąžinamos sumos išraišką.
	Savininko pelnas $P(v) = 1500 - 10v - 9 \cdot \frac{1000}{v}$,	• 1	Už teisingą pelno išraišką.
	$P'(v) = -10 + \frac{9000}{v^2}$,	• 1	Už teisingai apskaičiuotą išvestinę.
	$-10 + \frac{9000}{v^2} = 0$, $v = \pm 30$ (–30 netinka).	• 1	Už teisingai apskaičiuotus kritinius taškus.
		• 1	Už parodymą, kad $v = 30$ yra maksimumo taškas.
	$P(30) = 1500 - 300 - 300 = 900$. *Ats.:* 900 aukso monetų; 30 km/h.	• 1	Už teisingą atsakymą.

46 pav.18 uždavinio vertinimo instrukcija

Paskutinis uždavinys mokiniams buvo sunkiausias (uždavinio sunkumas 20 proc.). Teisingas jo sprendimas buvo vertinamas 6 taškais. Juos įstengė surinkti tik 9 proc. mokinių. 47 paveiksle matome šio uždavinio puikaus sprendimo pavyzdį.

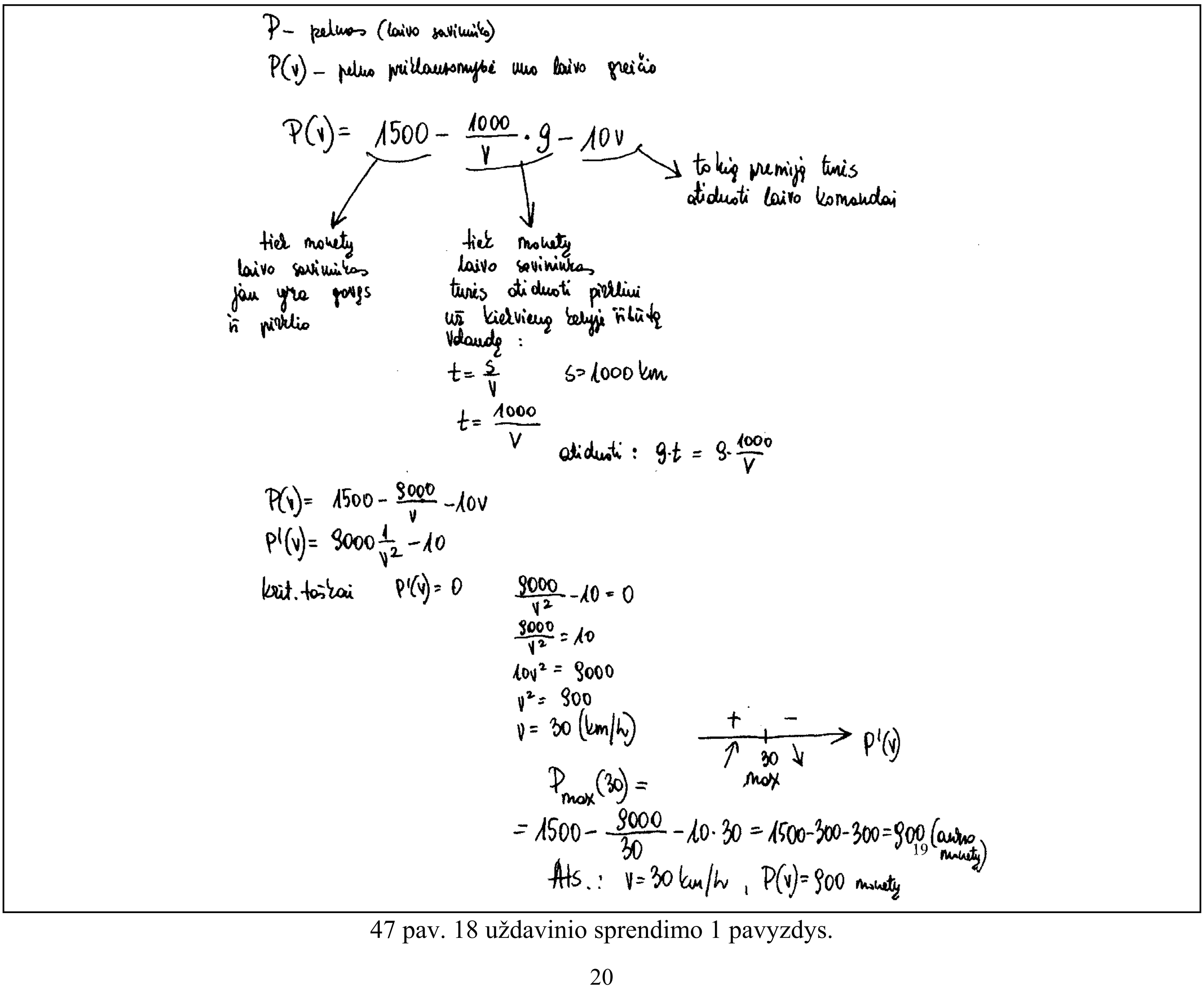
Panagrinėkime, kokius pagrindinius uždavinio sprendimo etapus turėjo įveikti mokiniai ir kaip jiems tai pavyko.

1 etapas. Mokiniai turėjo parodyti matematinio mąstymo gebėjimus – rasti tinkamą matematinį modelį uždaviniui išspręsti. Už teisingos pelno išraiškos užrašymą jie galėjo surinkti du taškus. Šį etapą įveikė beveik 27 proc. mokinių. Taigi šis uždavinio sprendimo etapas mokiniams buvo pats sunkiausias.

2 etapas. Trečiąjį ir ketvirtąjį tašką mokiniai galėjo gauti atlikę standartines procedūras – teisingai apskaičiavę išvestinę bei kritinius taškus. Paradoksalu, kad nors ir beveik visi šį etapą bandę įveikti mokiniai žinojo išvestinės skaičiavimo ir kritinių taškų radimo taisykles, tačiau dalis jų šių taškų negavo. Viena iš priežasčių – dalis mokinių, prieš ieškodami išvestinės, trupmeninę pelno funkcijos išraišką „pakeitė“ sveikuoju reiškiniu (žr. 48 pav.)!

3 etapas. Šiame etape mokiniai turėjo parodyti sugebėjimą reflektuoti – susieti 2 etapo rezultatus su uždavinio sąlyga ir gauti teisingą atsakymą. Skaudu, kad žinodami kaip pagrįsti, jog rastas taškas – maksimumo (žr. 48 pav.), dalis mokinių taip formaliai ir užrašo, nors paties mokinio(-ės) pavaizduota situacija rodo ką kita. Kita problema – pamirštami klausimai, į kuriuos prašoma atsakyti.

Apie du trečdalius mokinių už šio uždavinio sprendimą gavo 0 taškų. Dalis jų neįstengė sudaryti teisingos pelno funkcijos išraiškos, todėl nesurinko taškų. Buvo ir tokių, kurie bandė išspręsti uždavinį be išvestinės skaičiavimo (žr. 49 pav.). Jie spėjo greičio reikšmes (beje, dauguma rinkosi tik sveikuosius skaičius) ir su jomis skaičiavo, koks bus pelnas. Kai kuriems mokiniams, pasirinkusiems šį sprendimo būdą, pavyko gauti teisingą atsakymą, tačiau, taip spręsdami, jie ne visai pagrindžia, jog rastas pelnas iš tikrųjų yra maksimalus. Manytume, kad mokymo procese reikėtų daugiau dėmesio skirti tokio sprendimo būdo pranašumams ir trūkumams atskleisti. Mokiniai, rinkdamiesi šį sprendimo būdą, rizikuoja, nes gali nerasti teisingo sprendinio (tačiau laiko sugaišta nemažai), o jį radę – nepagrindžia, jog nebus kitų sprendinių. Jų sprendimas pakeičiamas tik atskirų atvejų nagrinėjimu, todėl negalėtų būti vertinamas didesniu taškų skaičiumi. Kita vertus, jeigu sprendžiant uždavinį būtų įmanoma patikrinti visus galimus variantus, ši uždavinio sprendimo strategija pasiteisintų.



P – pelnas (laivo savininko)

P(v) – pelno priklausomybė nuo laivo greičio

$$P(v) = \underbrace{1500}_{} - \underbrace{\frac{1000}{v}\cdot 9}_{} - \underbrace{10v}_{}$$

tiek monetų laivo savininkas jau yra gavęs iš pirklio

tiek monetų laivo savininkas turės atiduoti pirkliui už kiekvieną kelyje išbūtą valandą:

$t = \frac{s}{v}$ $s = 1000$ km

$t = \frac{1000}{v}$

atiduoti: $9\cdot t = 9\cdot\frac{1000}{v}$

tokią premiją turės atiduoti laivo komandai

$P(v) = 1500 - \frac{9000}{v} - 10v$

$P'(v) = 9000\frac{1}{v^2} - 10$

krit. taškai $P'(v) = 0$

$\frac{9000}{v^2} - 10 = 0$

$\frac{9000}{v^2} = 10$

$10v^2 = 9000$

$v^2 = 900$

$v = 30$ (km/h)

$$\xrightarrow[\nearrow \quad 30 \quad \searrow]{+ \qquad - } P'(v)$$

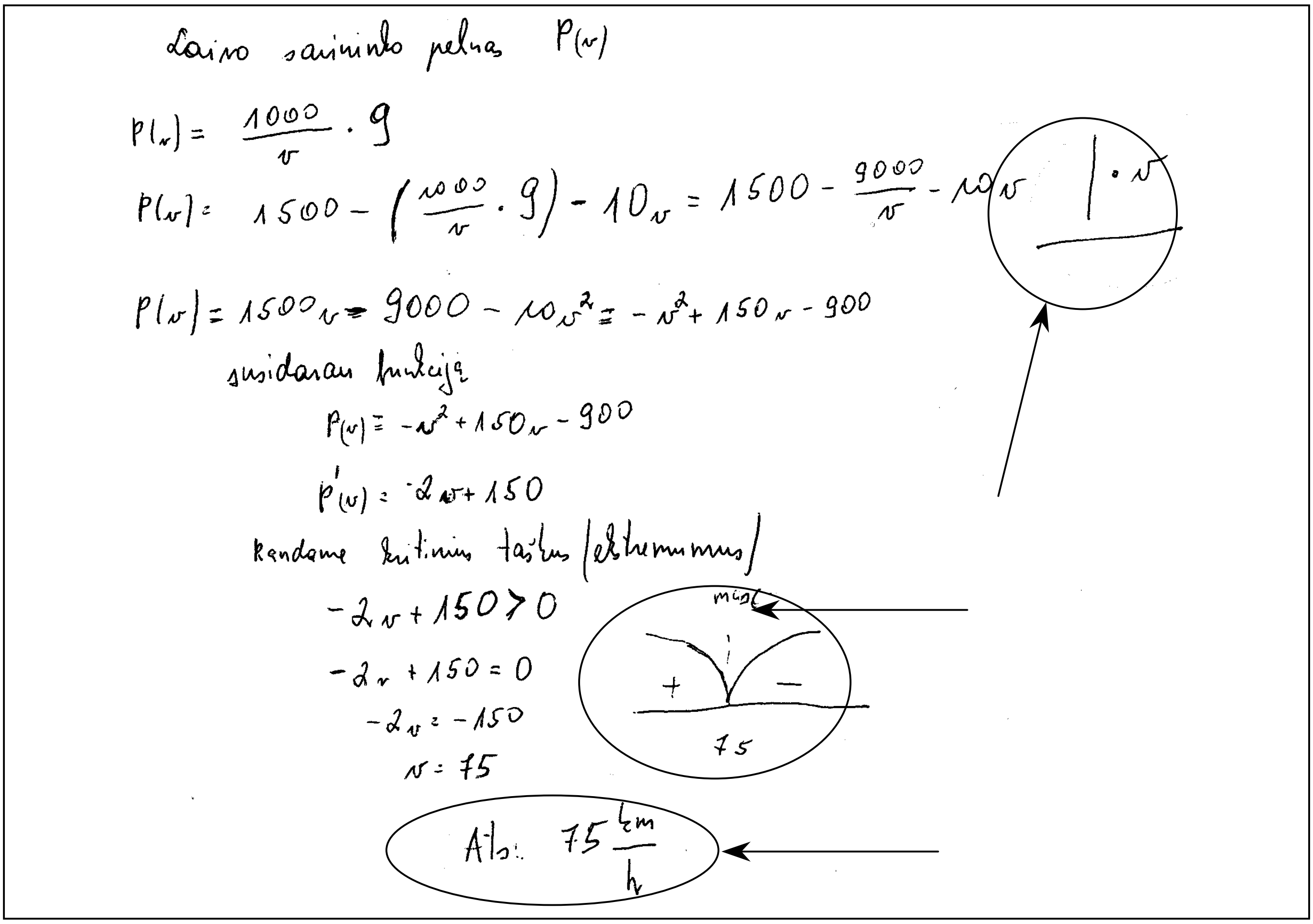
max

$P_{max}(30) =$

$= 1500 - \frac{9000}{30} - 10\cdot 30 = 1500 - 300 - 300 = 900$ (aukso monetų)

Ats.: $v = 30$ km/h, $P(v) = 900$ monetų

47 pav. 18 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys.



Laivo savininko pelnas $P(v)$

$P(v) = \frac{1000}{v} \cdot 9$

$P(v) = 1500 - \left(\frac{1000}{v} \cdot 9\right) - 10v = 1500 - \frac{9000}{v} - 10v \quad \boxed{|\cdot v}$

$P(v) = 1500v - 9000 - 10v^2 = -v^2 + 150v - 900$

susidarau funkciją

$P(v) = -v^2 + 150v - 900$

$P'(v) = -2v + 150$

Randame kritinius taškus (ekstremumus)

$-2v + 150 > 0$

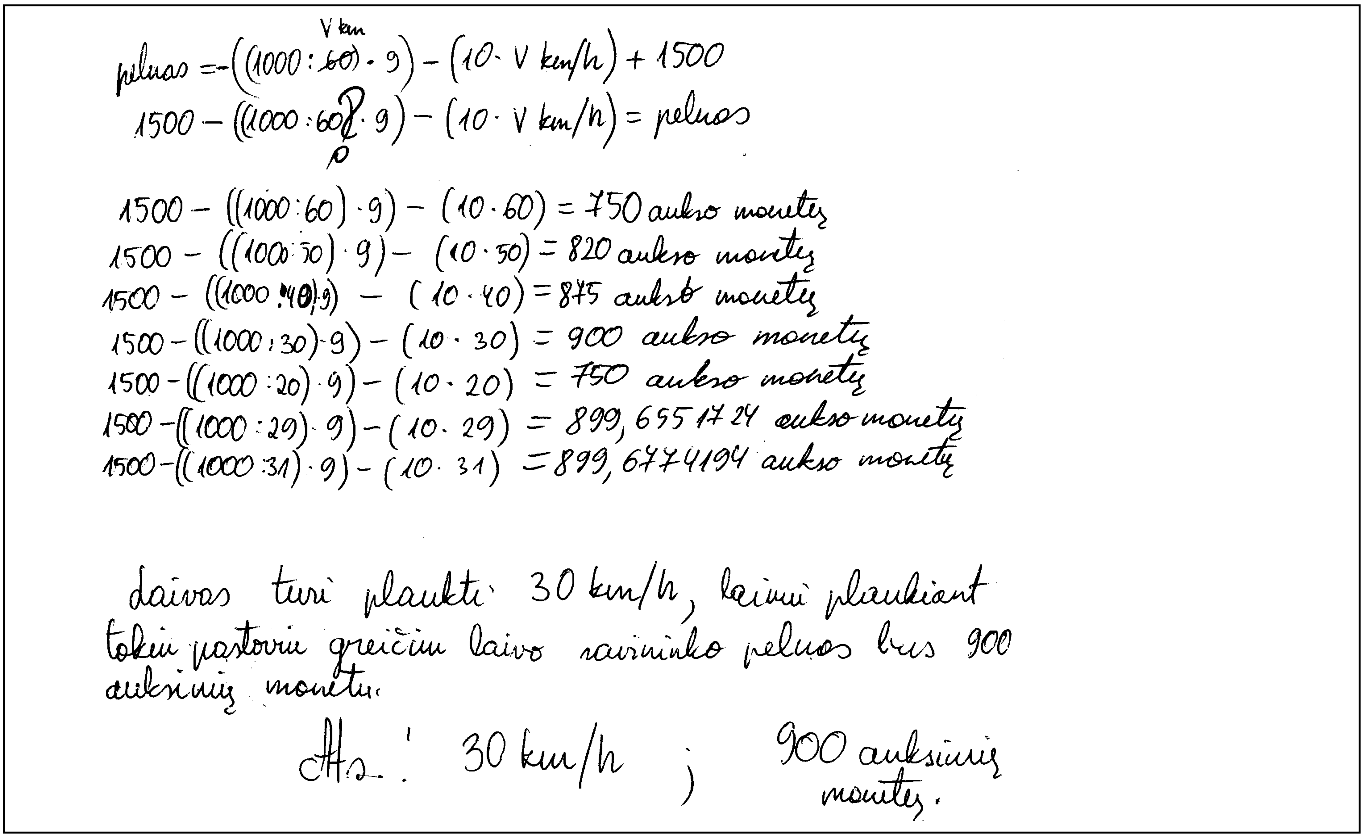
$-2v + 150 = 0$

$-2v = -150$

$v = 75$

Ats.: $75 \frac{km}{h}$

48 pav. 18 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



pelnas $= -((1000 : \overset{V\,km}{\cancel{60}}) \cdot 9) - (10 \cdot V\,km/h) + 1500$

$1500 - ((1000 : 60) \cdot 9) - (10 \cdot V\,km/h) =$ pelnas

$1500 - ((1000 : 60) \cdot 9) - (10 \cdot 60) = 750$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 50) \cdot 9) - (10 \cdot 50) = 820$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 40) \cdot 9) - (10 \cdot 40) = 875$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 30) \cdot 9) - (10 \cdot 30) = 900$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 20) \cdot 9) - (10 \cdot 20) = 750$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 29) \cdot 9) - (10 \cdot 29) = 899{,}6551724$ aukso monetų

$1500 - ((1000 : 31) \cdot 9) - (10 \cdot 31) = 899{,}6774194$ aukso monetų

laivas turi plaukti 30 km/h, laivui plaukiant tokiu pastoviu greičiu laivo savininko pelnas bus 900 auksinių monetų.

Ats.: 30 km/h ; 900 auksinių monetų.

49 pav. 18 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

KOMBINATORIKA, TIKIMYBĖS IR STATISTIKA

2004 m. egzamino užduotyje buvo vos du stochastikos uždaviniai, vienas jų – su pasirenkamaisiais atsakymais –buvo iš tikimybių teorijos, kitas – iš kombinatorikos.

Tikimybių teorijos uždavinys buvo pažymėtas pirmuoju numeriu (žr. 50 pav.).

Nr.1

Ant kortelių užrašytos šešios raidės *A*, *I*, *K*, *L*, *S*, *V*. Tikimybė, kad atsitiktinai sudėlioję šias korteles vieną šalia kitos gausime žodį VILKAS, lygi:

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{720}$ **C** $\frac{6}{720}$ **D** $\frac{5}{6}$ **E** $\frac{6}{5}$

50 pav. 1 uždavinio sąlyga

Mokiniai šį uždavinį sprendė puikiai (sunkumas – 85 proc.). Tai vienas lengviausių egzamino uždavinių. Pasižiūrėjus į pateiktus klaidinguosius atsakymus matyti, jog nemokantiems šio uždavinio išspręsti patraukliausias tarp klaidingųjų buvo tik atsakymas $\frac{6}{720}$. Iš tiesų tik šis vienintelis atsakymas yra „panašiausias“ į teisingą. Kiti atsakymai (ypač $\frac{6}{5}$, kai duotas skaičius, didesnis už vienetą) atrodo labai jau neįtikėtini. Tikimybių teorija mokiniams paprastai nėra lengva, tačiau pateikti atsakymai labai palengvina šios srities uždavinių sprendimą.

Kitas stochastikos uždavinys buvo iš kombinatorikos (žr. 51 pav.).

Nr. 12

Sauluvos valstybėje automobilio registracijos numerį sudaro penki ženklai: pirmieji du – lotynų abėcėlės raidės, kurios parenkamos iš 22 raidžių, kiti trys – skaitmenys, kurie parenkami iš skaitmenų 2, 4, 6, 8. Skaitmenų rinkinys sudarytas iš trijų vienodų skaitmenų (pavyzdžiui, 222, 444), nenaudojamas, kad nebūtų išskirtinių numerių. Kiek galima Sauluvos valstybėje sudaryti registracijos numerių?

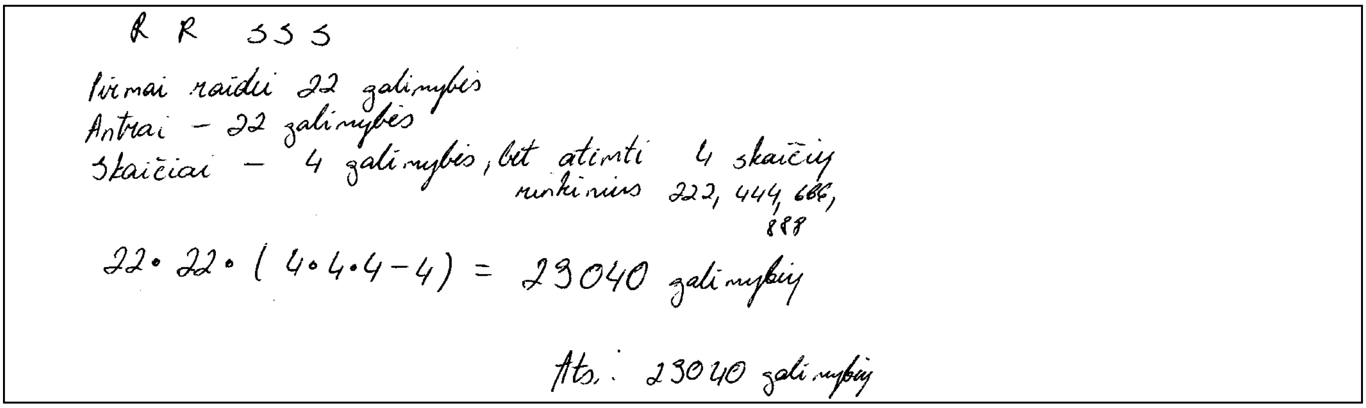
(3 taškai)

51 pav. 12 uždavinio sąlyga

Uždavinys mokiniams pasirodė sudėtingas (sunkumas – 42 proc., visus keturis taškus sugebėjo gauti tik 10 proc. dvyliktokų).

Vertinimo instrukcijose buvo pateiktas vienas iš galimų uždavinio sprendimo būdų: pirma apsiskaičiuoti visų galimų automobilių registracijos numerių variantų skaičių ($22 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$), po to rasti nenaudojamų numerių skaičių ($22 \cdot 22 \cdot 4$) ir galiausiai gauti atsakymą, atėmus vieną rezultatą iš kito ($22 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 22 \cdot 22 \cdot 4$). Dalis visus tris taškus už uždavinį gavusių mokinių būtent taip ir sprendė (dažniausiai tie, kurių egzamino rezultatai geresni).

Kita nedidelė daugiau egzamino taškų surinkusių mokinių dalis sprendė uždavinį, sudarydama reiškinį ir skaičiuodama skaitinę jo reikšmę (žr. 52 pav.).



R R SSS

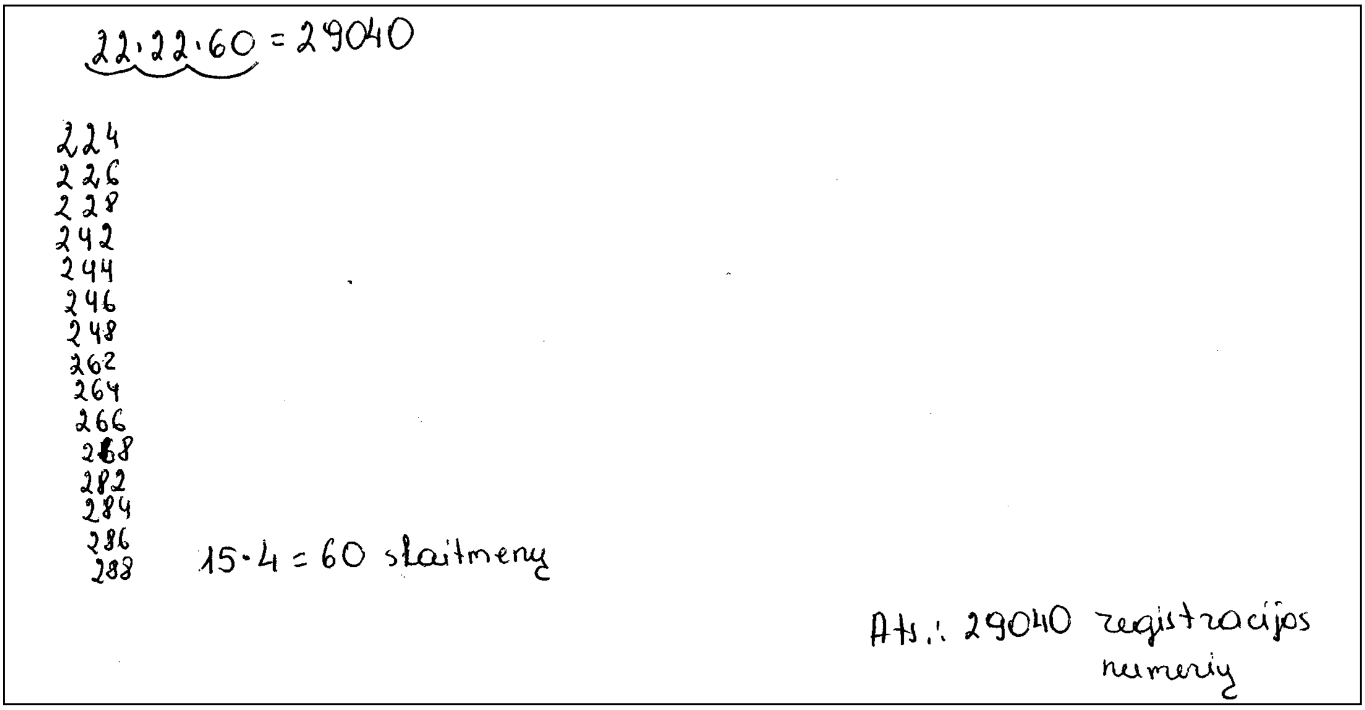
Pirmai raidei 22 galimybės
Antrai – 22 galimybės
Skaičiai – 4 galimybės, bet atimti 4 skaičių rinkinius 222, 444, 666, 888

$22 \cdot 22 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 - 4) = 23040$ galimybių

Ats.: 23040 galimybių

52 pav. 12 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Prastesnius egzamino rezultatus gavę mokiniai dažniausiai uždavinį sprendė išsirašydami galimus registracijos numerių variantus. Čia pateikiamas visiškai teisingas tik 14 egzamino taškų surinkusio mokinio sprendimas (žr. 53 pav.).



$\underbrace{22\cdot22\cdot60} = 29040$

224
226
228
242
244
246
248
262
264
266
268
282
284
286
288

$15\cdot4 = 60$ skaitmenų

Ats.: 29040 registracijos numerių

53 pav. 12 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys.

Jei mokinys nėra įsitikinęs, kad pavyks teisingai užrašyti uždavinio sprendimą skaitine išraiška, galimų variantų išrašymas yra geras kelias atsakymui gauti.

Sprendžiant šį kombinatorikos uždavinį, išaiškėjo kelios būdingos klaidos.

Pagrindinė klaida – užuot pamąsčius ir tiesiog skaitine išraiška užrašius tai, kas duota sąlygoje, buvo bandoma įvairiais būdais taikyti visokias formules, ypač derinių. Įvairiais būdais derinių formules dėliojo net trečdalis dvyliktokų. Yra formulė – reikia kažkaip ją panaudoti, o ką ji iš tiesų reiškia, atrodo nelabai daug kas ir supranta.

Kitas tipiškas klaidingas sprendimas – $22 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ (tokiu atveju neteisingai randamas naudojamų registracijos numerių skaičius). Taip išsprendė daugiau kaip 13 proc. dvyliktokų.

Dar kiti panašūs klaidingi sprendimai – $22 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (10 proc.) arba $22 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (daugiau kaip 4 proc.). Pirmu atveju mokiniai teisingai įvertino, koks yra skirtingų raidžių pasirinkimo variantų skaičius, tačiau skaičiuodami skaitmenų rinkinius neįvertino, jog pastarieji gali kartotis. Antru atveju mokiniai neatsižvelgė į tai, jog raidės ir skaitmenys gali pasikartoti.

Įdomu tai, kad daugiau kaip 5 proc. dvyliktokų, spręsdami šį uždavinį, vietoje kombinatorinės daugybos taisyklės bandė taikyti kombinatorinės sudėties taisyklę.

Tik 2 proc. mokinių nepateikė jokio šio uždavinio sprendimo.

Uždavinio skiriamoji geba žema. Tai galėtų reikšti, jog uždavinio mokiniai neišsprendžia ne dėl jo sudėtingumo, o dėl to, kad būtent šios srities uždavinius daliai mokinių (ir jų mokytojų?) kažkodėl vis dar yra sunku spręsti. Žemą skiriamąją gebą turi ir pirmasis – tikimybių srities – uždavinys, panašiai kaip ir pernai metų kombinatorikos uždavinys apie Brailio sistemos simbolius.

IŠVADOS

1. Šiais metais matematikos valstybinio brandos egzamino užduotį, lyginant su 2003 m. rezultatais, pakankamai gerai atlikusių mokinių dalis padidėjo: 2004 m. egzamino užduoties taškų sumos vidurkis – 21,57, standartinis nuokrypis – 12,78, o 2003 m. buvo atitinkamai 18,38 ir 11,90).

2. Vertinant uždavinius, kurių sprendimus reikėjo rašyti, pastebėti tie patys mokinių darbų trūkumai, kaip ir ankstesniais metais:

a) išryškėjo nemaža bazinių žinių ir standartinių procedūrų taikymo spragų;

b) trūko teiginių argumentavimo, korektiško uždavinio sprendimo užrašymo.

Šiais metais ypač pastebimas daugelio mokinių negebėjimas pasitelkti tinkamus matematinius terminus ir simboliką. Mokytojai turėtų į tai atkreipti dėmesį, ypač dėstydami naują algebros, funkcijų ir analizės pradmenų medžiagą, vertindami mokinių savarankiškus ir kontrolinius darbus.

3. Šiais metais, panašiai kaip ir 2003 m., uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais buvo sprendžiami geriau nei uždaviniai, kurių sprendimus reikia pateikti.

4. Maždaug pusė abiturientų puikiai išsprendė visus skaičiavimo ir algebros srities uždavinius (išskyrus uždavinį su progresijomis). Apie 15 proc. mokinių, išlaikiusių valstybinį egzaminą, šios srities pasiekimų lygmuo yra labai žemas. Šie mokiniai stokoja paprasčiausių šios srities žinių bei įgūdžių, elementaraus supratimo. Palyginus šios srities uždavinių sprendimo rezultatus su ankstesnių metų atitinkamais rezultatais, pastebėta, kad mokinių pasiekimai algebros srityje prastėja.

5. Vertinant geometrinius uždavinius, pastebėti tokie pagrindiniai trūkumai:

a) dalis mokinių neskiria stereometrinių kūnų ir nesugeba jų nubraižyti;

b) daugelis nemoka tinkamai argumentuoti, įrodinėti ir logine seka išdėstyti sprendimo.

6. Funkcijų ir analizės pradmenų srities uždavinių sprendimuose išryškėjo daugiau taškų pelniusių mokinių geresni uždavinių analizavimo, funkcijų savybių taikymo gebėjimai. Šios srities uždavinius algebriniais metodais nesėkmingai sprendė mažiau taškų surinkę mokiniai – jie klydo atlikdami standartines procedūras.

7. Pagrindinė kombinatorikos, tikimybių ir statistikos srities uždavinių problema – „aklas“ formulių taikymas, nesuprantant jų prasmės. Mokytojams rekomenduojama daugiau dėmesio skirti kombinatorinės daugybos taisyklės taikymui.

8. Uždavinių sprendimų analizė leidžia daryti prielaidą, kad matematinio ugdymo praktikoje per mažai dėmesio yra skiriama matematinių terminų ir simbolikos vartojimui bei tinkamam sprendimo pateikimui. Pastebima tendencija, kad daugiau taškų surinkę mokiniai dažniau ir tiksliau naudoja matematinius simbolius, renkasi racionalesnius sprendimo būdus bei sklandžiau dėsto mintis.

Smagu vertinti korektiškai užrašytus uždavinių sprendimus, džiaugtis gerais mokinių rezultatais – tai ne tik pačių mokinių, bet ir mokytojų didelio darbo, matematikos mokymo patirties rezultatas.

* * *