LIETUVOS RESPUBLIKOS ŠVIETIMO IR MOKSLO MINISTERIJA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS

2005 M. MATEMATIKOS

VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO REZULTATŲ

KOKYBINĖ ANALIZĖ

Antanas Apynis, Marytė Stričkienė

ĮVADAS

Rengiant matematikos 2005 metų valstybinio brandos egzamino rezultatų kokybinę analizę buvo siekiama:

- išanalizuoti mokinių egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatus;
- pademonstruoti įvairias galimas uždavinių sprendimo strategijas, pateikiant mokinių teisingo sprendimo pavyzdžius su komentarais, specialistų parengtas kai kurių uždavinių sprendimo vertinimo instrukcijas;
- aptarti mokinių darbuose pasitaikiusias būdingas klaidas;
- palyginti šių metų ir 2003 bei 2004 metų rezultatus;
- pateikti rekomendacijas mokytojams.

Egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatai aptariami priskiriant juos vienai ar kitai egzamino programos matricoje numatytai turinio sričiai:

- skaičiai, skaičiavimai, algebra;
- geometrija;
- funkcijos ir analizės pradmenys;
- kombinatorika, tikimybės ir statistika.

Nagrinėjant kiekvienos turinio srities uždavinius, atkreiptas dėmesys ir į tai, kokius gebėjimus turėjo pademonstruoti mokiniai, spręsdami konkretų uždavinį.

Statistinė ar kitokia informacija apie atskiras turinio sritis nepateikiama, nes iš kelių vienos ar kitos srities uždavinių negalima daryti patikimų išvadų.

Atkreipiamas dėmesys į tai, kad didelė dalis uždavinių, kurie buvo vertinami daugiau nei vienu tašku, buvo priskiriami kelioms turinio sritims (pavyzdžiui, keli taškai – geometrijai, vienas – funkcijoms, vienas – skaičiavimams), atsižvelgiant į tai, kurios turinio srities žinių ar įgūdžių reikalavo atitinkamas uždavinio sprendimo žingsnis.

Rengiant šią kokybinę analizę buvo remtasi 2005 m. statistine matematikos valstybinio brandos egzamino užduoties analize, peržiūrėta daug darbų iš reprezentatyvios visų egzaminą laikiusių mokinių darbų imties.

Šių metų mokinių rezultatai buvo lyginami ir su 2003 bei 2004 m. matematikos valstybinį brandos egzaminą laikiusiųjų rezultatais.

Tikimės, kad ši analizė bus naudinga matematikos mokytojams, mokiniams bei valstybinio matematikos egzamino užduoties rengėjams.

I. SKAIČIAI, SKAIČIAVIMAI, ALGEBRA

Valstybinio egzamino užduotyje yra du uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais (1 ir 5), kuriais tiesiogiai tikrinamas mokinių gebėjimas atlikti veiksmus su skaičiais. Algebros skyriui be išlygų galima priskirti vieną trumpo sprendimo (9) ir vieną kompleksinį uždavinį (18). Iš dalies funkcijų, iš dalies skaičiavimų temai priklauso logaritmo skaičiavimo uždavinys (10) bei kosinuso reikšmės skaičiavimo uždavinys (2). Šioje analizėje jie priskirti funkcijų ir analizės pradmenų sričiai.

Tam tikri skaičiavimo gebėjimai ir algebros žinios yra reikalingos sprendžiant geometrijos bei kitų sričių uždavinius.

1. $2^{2005}+2^{2005}=$

A 2^{4010} **B** 2^{2006} **C** 4^{2005} **D** 4^{4010} **E** $3\cdot 2^{2004}$

1 pav. 1 uždavinio sąlyga

© Nacionalinis egzaminų centras, 2005

Šis uždavinys yra gebėjimo skaičiuoti tikrinimo pratimas.

Atsakymai 4^{4010} ir $3\cdot 2^{2004}$ skaičiuojant sumą $2^{2005}+2^{2005}$ yra labai abejotini; bet tada liktų tik trys alternatyvos: 2^{4010}, 2^{2006} ir 4^{2005}.

Kadangi nėra sprendimų, galima tik spėlioti, kodėl 12 proc. mokinių pasirinko atsakymą 2^{4010}, o 19,25 proc. – atsakymą 4^{2005}.

5. Kai $b>a>0$, tai $\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=$

A $2\sqrt{a}$ **B** 0 **C** $2\sqrt{b}$ **D** $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ **E** $-2\sqrt{a}$

2 pav. 5 uždavinio sąlyga

Tai paprastas skaičiavimo uždavinys, kuriuo tikrinama, kaip suprantamas skaičiaus modulis.

Šio uždavinio atsakymą galima gauti tik skaičiuojant (pateiktų atsakymų atmetimo principas netinka). Vis dėlto atsakymai 0, $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ ir $-2\sqrt{a}$ yra labai „pritempti“. Pagal jų pasirinkimą galima nebent spręsti, kad mokinys šio uždavinio tikriausiai nesprendė, o tiesiog bandė atspėti teisingą atsakymą. Pagal statistiką šiuos atsakymus rinkosi net 22,75 proc. mokinių.

9. Sandėlyje esančių 14 pušinių rąstų masių vidurkis 64 kg, o ąžuolinių – 80 kg. Visų rąstų masių vidurkis yra 73 kg. Kiek sandėlyje yra ąžuolinių rąstų?

(2 taškai)

3 pav. 9 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
9		**2**	
	Pažymėkime raide x ąžuolinių rąstų skaičių. $\frac{64\cdot 14+80x}{x+14}=73$, $896+80x=73x+1022$, $x=18$. *Ats.:* 18 ąžuolinių rąstų.	• 1 • 1	Už teisingą sprendimo būdo pasirinkimą. Už gautą teisingą atsakymą.

4 pav. 9 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręsto uždavinio pavyzdžiai (žr. 5 ir 6 pav.).

Sakykime, kad sandėlyje yra x ąžuolinių rąstų. Tai visų rąstų bendra masė $(64\cdot 14+80x)$ kg.

Visų rąstų masių vidurkis:

$$\frac{64\cdot 14+80x}{14+x}=73$$

$$\frac{896+80x}{14+x}=73$$

$$896+80x=1022+73x$$

$$7x=126$$

$$x=18 \text{ (gž. rąstų).}$$

Atš.: 18 ąžuolinių rąstų.

5 pav. 9 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Yra x ąžuolinių rąstų.
Iš viso yra $14+x$ rąstų.
Tada

$$14\cdot 64+80x=(14+x)\cdot 73$$

$$14\cdot 64+80x=73\cdot 14+73x$$

$$7x=14(73-64)$$

$$7x=14\cdot 9$$

$$x=18$$

Ats.: $x=18$

6 pav. 9 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Tai vidutinio sunkumo uždavinys, kuris labai gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai užduotį atlikusius mokinius ir puikiai koreliavo su visa užduotimi. Apie 45 proc. mokinių gavo po 0 taškų, apie 50 proc. – gerai išsprendė uždavinį ir tik 5 proc. mokinių prarado po vieną tašką, nes padarė skaičiavimo klaidų. Įdomu pastebėti, kad kai kurie mokiniai šį uždavinį gerai sprendė, nors kitus gana prastai. Šį uždavinį bandė spręsti beveik visi mokiniai. Daugumos sprendimai tradiciniai – sudarant lygtį, tačiau buvo ir sprendžiančių klausimais. Būdingos klaidos – rąstų skaičius prilygintas jų masei, sudarytos neteisingos lygybės. Labiausiai nustebino dvyliktoko darbas, kuriame sprendžiant šį uždavinį sudėti skaičiai nuo 1 iki 14, jų suma padalyta iš 4, ir kažkodėl prilyginta 64. Šis uždavinys atskleidė, kad matematikos valstybinį egzaminą renkasi ir mokiniai, kurie nepakankamai jam pasirengę, neturi matematikos žinių pagrindų.

18. Vienoje gatvės pusėje esančių namų (jų daugiau nei vienas) numeriai yra vienas po kito einantys lyginiai skaičiai, kurių suma lygi 114. Raskite šių namų skaičių ir jų numerius.

(6 taškai)

7 pav. 18 uždavinio sąlyga

Tai aritmetinės progresijos taikymo gana paprastai problemai spręsti uždavinys.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
18		**6**	
	Namų numeriai sudaro seką $2n$, $2n+2$, $2n+4$, … , kuri yra aritmetinė progresija: $a_1 = 2n$, $d = 2$. Namų skaičių pažymėkime x. Namų numerių suma bus: $\frac{(2\cdot 2n + 2(x-1))\cdot x}{2} = 114$, $(2n + x - 1)\cdot x = 114$, $n \in N$, $x \in N$, $x \neq 1$. 114 dalikliai: 1; 2; 3; 6; 19; 38; 57; 114. Galimi atvejai: 1) $\begin{cases} x = 2, \\ 2n + x - 1 = 57; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3, \\ 2n + x - 1 = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 6, \\ 2n + x - 1 = 19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 19, \\ 2n + x - 1 = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 38, \\ 2n + x - 1 = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 57, \\ 2n + x - 1 = 2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x = 114, \\ 2n + x - 1 = 1. \end{cases}$ 1) 2 namai: jų numeriai yra 56 ir 58; 2) 3 namai: jų numeriai 36; 38; 40; 3) 6 namai: jų numeriai 14; 16; 18; 20; 22 ir 24. 4), 5), 6), 7) sistemos sprendinių neturi.	• 1 • 1 • 1 • 1 • 1 • 1	Už aritmetinės progresijos pastebėjimą. Už teisingai gautą formulę namų numerių sumai apskaičiuoti. Už teisingai pasirinktą strategiją namų skaičiui apskaičiuoti. Už visų galimų atvejų užrašymą. Už teisingą 1), 2) ir 3) sistemų sprendimą Už suvokimą, kad 4), 5), 6) ir 7) sistemos sprendinių neturi.

8 pav. 18 uždavinio vertinimo instrukcija

Aritmetinė progresija čia visai aiškiai matoma. Jos pirmasis narys a_1 yra lyginis skaičius, o skirtumas $d = 2$. Namų skaičius n ir pirmojo namo numerį a_1 pagal sąlygą sieja formulė $(a_1 + (n-1))n = 114$ (ji gaunama iš aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulės). Iš jos gauname formulę skaičiui a_1 rasti: $a_1 = \frac{114}{n} - (n-1)$. Šios lygties analizė yra nesunki, nes natūralusis skaičius n turi būti skaičiaus 114 daliklis ir turi tenkinti sąlygą $\frac{114}{n} - (n-1) \geq 2$. Taigi $n \in \{2; 3; 6\}$, nes kiti skaičiaus 114 dalikliai (19, 38, 57, 114) netenkina pastarosios nelygybės. Telieka apskaičiuoti a_1 ir padaryti galutines išvadas.

Vertinimo instrukcijoje (žr. 8 pav.) nenumatyta skirti taškų už įrodymą, kad namų skaičius n turi būti 114 daliklis. Taip pat peršamas būtinumas sudaryti ir nagrinėti visas septynias lygčių sistemas (žinoma, galima ir taip spręsti).

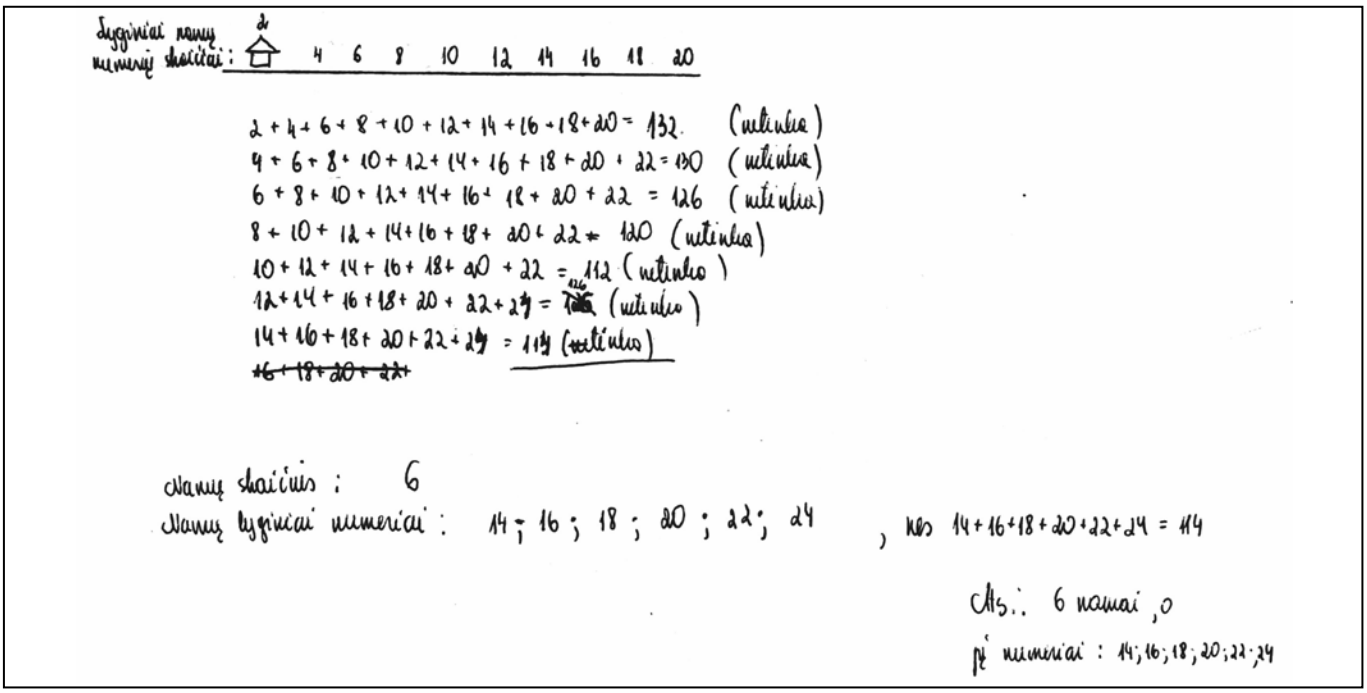
Šis uždavinys yra patrauklus didaktiniu požiūriu, nes

- jo sąlyga aiškiai suvokiama;
- matematinis modelis nėra sudėtingas;
- yra įvairių matematinio modelio analizės galimybių.

Susipažinus su mokinių darbais buvo nustatyta gana didelė šio uždavinio sprendimų įvairovė. Su tam tikromis išlygomis galima išskirti tris sprendimo strategijų grupes:

1) aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos S_n formulės taikymas;
2) tiesioginis loginės analizės būdas;
3) spėjimo ir tikrinimo būdas.

Pateikiame konkrečių sprendimų pavyzdžių (žr. 9, 10, 11, pav.), atitinkančių minėtąsias strategijas.



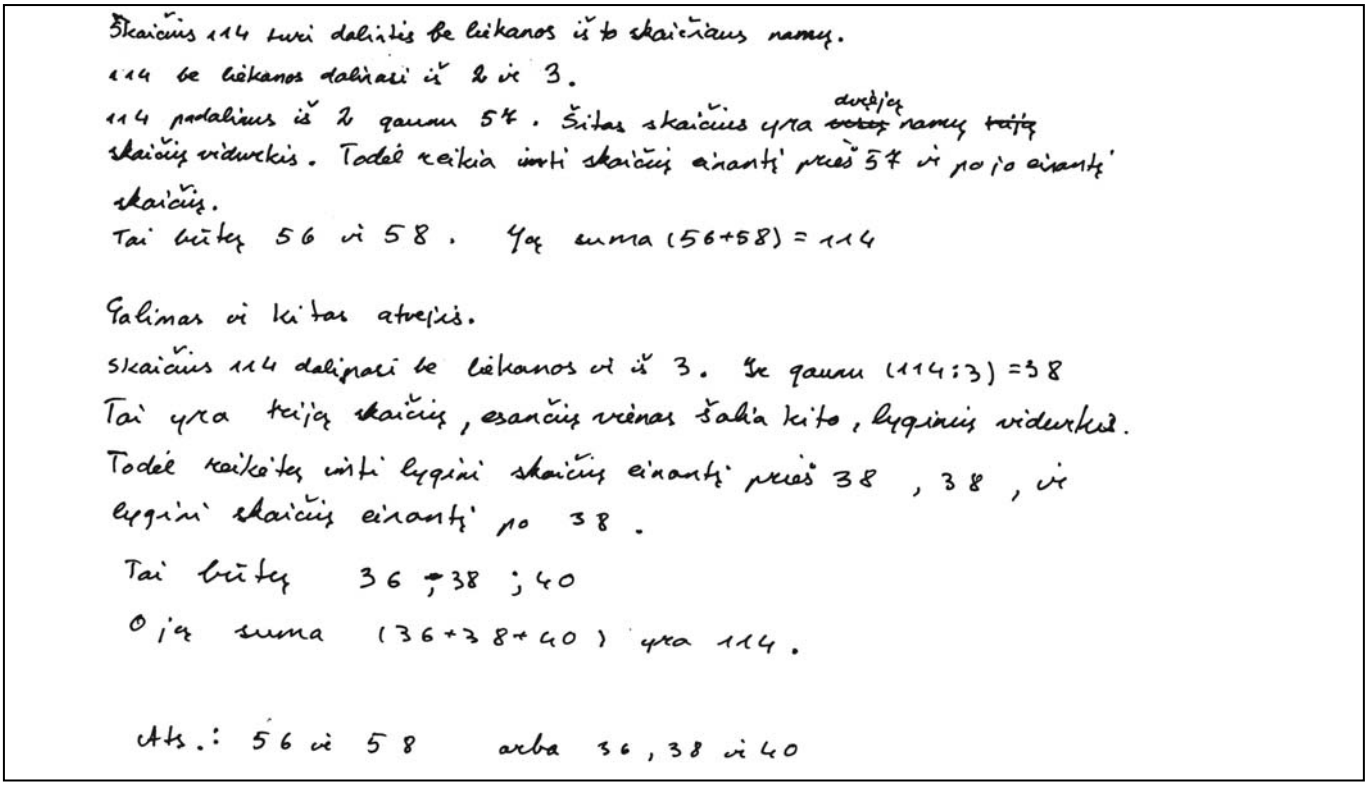
Lyginiai namų numerių skaičiai: 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 132 (netinka)
4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 = 130 (netinka)
6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 = 126 (netinka)
8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 = 120 (netinka)
10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 = 112 (netinka)
12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 = 126 (netinka)
14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 = 114 (netinka)
~~16 + 18 + 20 + 22 +~~

Namų skaičius: 6
Namų lyginiai numeriai: 14; 16; 18; 20; 22; 24, nes 14+16+18+20+22+24 = 114

Ats.: 6 namai, o jų numeriai: 14; 16; 18; 20; 22; 24

9 pav. 18 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

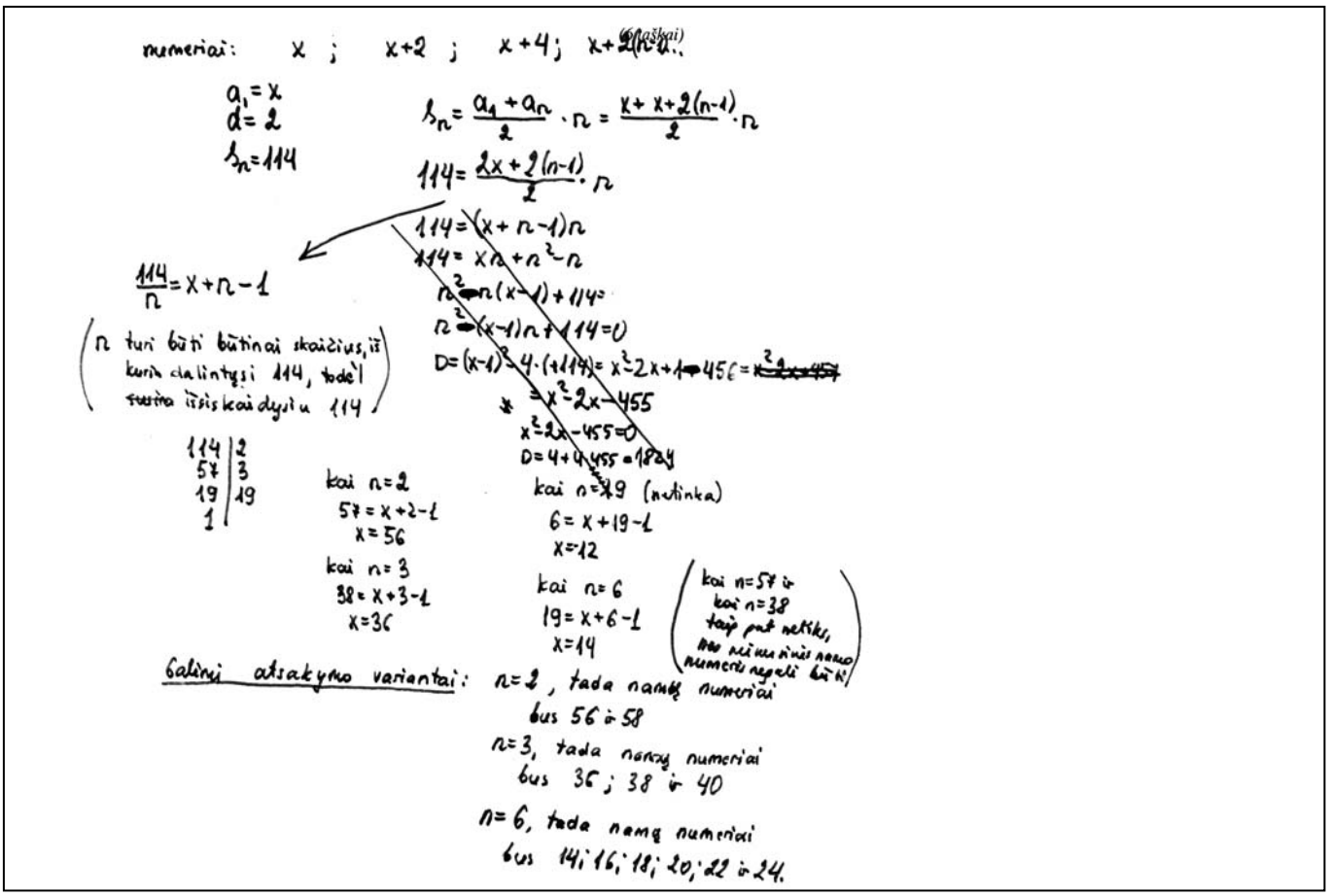


Skaičius 114 turi dalintis be liekanos iš to skaičiaus namų.
114 be liekanos dalinasi iš 2 ir 3.
114 padalinus iš 2 gaunu 57. Šitas skaičius yra ~~vidur~~ dvejų namų ~~trijų~~ skaičių vidurkis. Todėl reikia imti skaičių einantį prieš 57 ir po jo einantį skaičių.
Tai būtų 56 ir 58. Jų suma (56+58) = 114

Galimas ir kitas atvejis.
Skaičius 114 dalinasi be liekanos ir iš 3. Ir gaunu (114:3) = 38
Tai yra trijų skaičių, esančių vienas šalia kito, lyginių vidurkis.
Todėl reikėtų imti lygini skaičių einantį prieš 38, 38, ir lygini skaičių einantį po 38.
Tai būtų 36; 38; 40
O jų suma (36+38+40) yra 114.

Ats.: 56 ir 58 arba 36, 38 ir 40

10 pav. 18 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



11 pav. 18 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Daugelis šį uždavinį sprendusių mokinių tyrinėjo aritmetinės progresijos narių sumos formulę (neretai priveldami įvairių klaidų). Pavyko aptikti vieną darbą, kuriame iš pradžių aiškinamasi, ar pirmasis progresijos narys gali būti 2. Pasirinkus $a_1 = 2$, gaunama kvadratinė lygtis $n^2 + n - 114 = 0$, neturinti sveikųjų sprendinių. Iš to daroma išvada, kad pirmo namo numeris yra didesnis už 2. Toliau mokinys padarė klaidų ir todėl rado tik vieną atsakymą (iš trijų galimų).

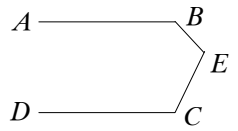
Tarp peržiūrėtų darbų nebuvo nė vieno šio uždavinio sprendimo, kuriame būtų buvusios sudarytos ir išnagrinėtos vertinimo instrukcijoje pateiktos lygčių sistemos. Todėl vertinimo komisijai teko papildyti šią instrukcijos dalį.

Nemažai mokinių arba visai nesprendė šio uždavinio, arba privėlė šiurkščių klaidų. Tai rodo nepakankamą jų matematinį išprusimą bei prastą pasirengimą valstybiniam egzaminui.

II. GEOMETRIJA

Geometrijos sričiai priklauso 7 uždavinys su pasirenkamaisiais atsakymais. Juo tikrinamos mokinių žinios apie kampų matavimą. Sudėtingesni yra struktūruoti uždaviniai (14, 15, 16). Jais tikrinamos vektorių algebros, kampų skaičiavimo ir kitos planimetrijos bei stereometrijos žinios. Yra įrodymo elementų. 16 uždavinys kartu yra ir taikomojo pobūdžio.

7. Žinoma, kad $AB \parallel CD$ (žr. pav.). Kam lygi suma $\angle B + \angle E + \angle C$?

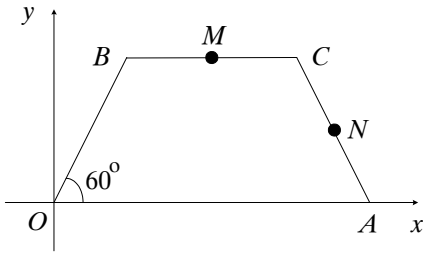


A 90° **B** 180° **C** 270° **D** 360° **E** 540°

12 pav. 7 uždavinio sąlyga

Tai planimetrijos žinių tikrinimo uždavinys. Statistika rodo, kad jis mokiniams buvo nesunkus.

14. Koordinačių plokštumoje lygiašonė trapecija $OBCA$ nubraižyta taip, kaip parodyta paveiksle. Kraštinės $OB = BC = AC = 2$, $\angle BOA = 60^\circ$, M ir N – atitinkamai kraštinių BC ir AC vidurio taškai.



1. Raskite taško B koordinates. *(1 taškas)*

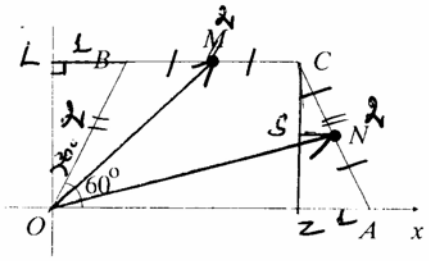
2. Raskite vektorių $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ koordinates. *(2 taškai)*

3. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ kosinusą. *(2 taškai)*

13 pav. 14 uždavinio sąlyga

Tai struktūruotas geometrijos uždavinys. Juo tikrinamas mokinių gebėjimas taikyti elementarias geometrijos žinias plokštumos taškų bei vektorių koordinatėms rasti. Uždavinyje aprašyta situacija nėra probleminė, nors kampo tarp vektorių $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ galima ieškoti taikant ne tik vektorių skaliarinę sandaugą, bet ir kosinusų teoremą.

Tarp analizuotų darbų yra nuosekliai ir aiškiai aprašytų sprendimų (žr. 14 pav.).



1) Taško B koordinatės yra vektoriaus $\overrightarrow{OB}$ koordinatės
Braižau $BL \perp Oy$.
OL yra taško B y koordinatė, LB – B x koordinatė
$\angle LOB = 90^\circ - \angle BOA = 30^\circ$
$BL = 1$ (statinis prieš 30° $\angle$ lygus pusei įžambinės).
P.P.t. $OL = \sqrt{BO^2 - LB^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ $\quad B(1; \sqrt{3})$

2) $\overrightarrow{OM}$ koordinatės yra M koordinatės. $\overrightarrow{ON}$ koordinatės yra N koordinatės. Braižiau $CZ = OL = \sqrt{3}$
P.P.t. $ZA = \sqrt{CA^2 - CZ^2} = 1$
M taško x koordinatė yra $LM = LB + BM = 1 + 1 = 2$ ($BM = MC = \frac{1}{2}BC$)
M taško y koordinatė yra taško B y koordinatė, nes vienoje tiesėje šie taškai. $M(2; \sqrt{3})$
N taško y koordinatė yra taško S y koordinatė $= \frac{1}{2}CZ = \frac{1}{2}OL = \sqrt{3}/2$
Braižiau $NG \parallel ZA$ $\quad NG = \frac{1}{2}ZA = 0{,}5$ (Talio teorema)
N taško x koordinatė yra $OZ + SN = LB + BC + SN = 3{,}5$
$N(3{,}5; \sqrt{3}/2)$

3) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \cos \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}$
$\cos \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|}$

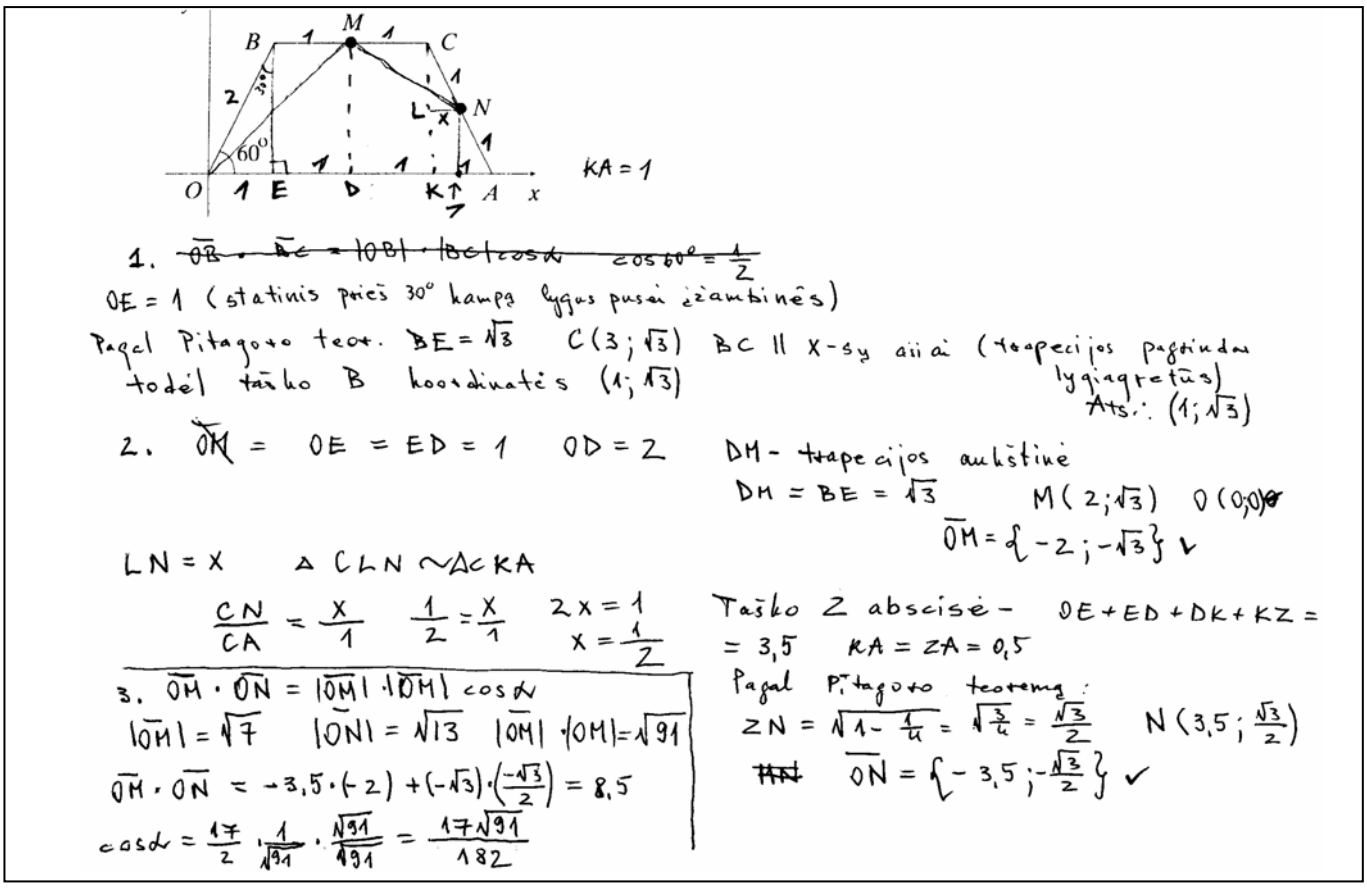
$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2 \cdot 3{,}5 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 7 + 3/2 = 8{,}5$
$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$
$|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{(3{,}5)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{12{,}25 + 0{,}75} = \sqrt{13}$

$\cos \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \frac{8{,}5}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{13}} = \frac{8{,}5}{\sqrt{91}} = \frac{8{,}5\sqrt{91}}{91} = \frac{85\sqrt{91}}{910}$ ✓

Atš.: 1) $B(1; \sqrt{3})$ 2) $\overrightarrow{OM}(2; \sqrt{3})$ $\overrightarrow{ON}(3{,}5; \sqrt{3}/2)$ 3) $\cos \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \frac{85\sqrt{91}}{910}$

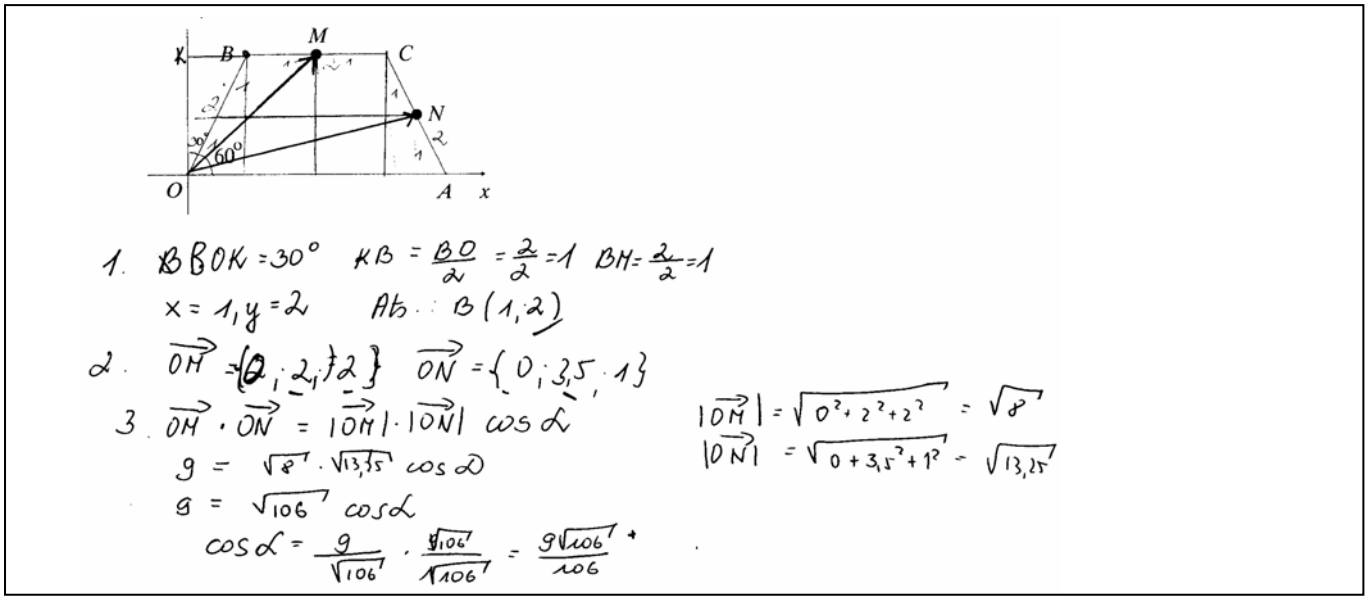
14 pav. 14 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Dalis mokinių visai nesprendė šio uždavinio. Įdomesni yra tie darbai, kuriuose galima įžvelgti tam tikrą sprendimo logiką bei daromų klaidų priežastis.



15 pav. 14 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Tarp klaidingų sprendimų yra tokių, kurie rodo labai formalų supratimą apie vektoriaus koordinates. Štai 15 paveiksle matyti, kad gautos neigiamos vektorių $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ koordinatės, nors šie vektoriai yra spinduliai, kurių pabaigos taškai yra pirmajame ketvirtyje. Aptikta darbų (žr. 16 pav.), kuriuose plokštumos vektoriai $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ apibūdinti trimis koordinatėmis.



16 pav. 14 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Pasitaikė darbų, pagal kuriuos galima spręsti, kad dalis mokinių, laikiusių valstybinį matematikos egzaminą, turi miglotą supratimą apie trigonometrines funkcijas (žr. 17 pav.). Ne vienam mokiniui gauti gerą įvertinimą sutrukdė prasti skaičiavimo gebėjimai (žr. 18 pav.).

1. $\cos 60^\circ = \frac{OE}{2}$; $\sin 60^\circ = \frac{BE}{2}$

$0{,}5 = \frac{OE}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BE}{2}$

$OE = 1$; $BE = \sqrt{3}$

$B(1;\sqrt{3})$ Ats.: $B(1;\sqrt{3})$

2. $\vec{OM}(1+1;\sqrt{3}) = \vec{OM}(2;\sqrt{3})$

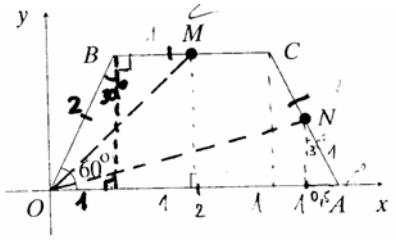
$\vec{ON}(2+1+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}) = \vec{ON}(\frac{7}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ Ats.: $\vec{OM}(2;\sqrt{3})$; $\vec{ON}(\frac{7}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

3. $\cos(\widehat{\vec{OM};\vec{ON}}) = \frac{\vec{OM}\cdot\vec{ON}}{|\vec{OM}|\cdot|\vec{ON}|} = \frac{2\cdot\frac{7}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2^2+\sqrt{3}^2}\cdot\sqrt{\frac{7^2}{2}+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \frac{7+\frac{3}{2}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{13}} = \frac{17}{2}\cdot\sqrt{7\cdot 13} =$

$= \frac{17\sqrt{91}}{2}$

Ats.: $\frac{17\sqrt{91}}{2}$

17 pav. 14 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys



1. Raskite taško B koordinates. $x = 1$, nes prieš 30° kampą

$y = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, pagal Pitagorą Ats.: $B(1;\sqrt{3})$

2. Raskite vektorių $\vec{OM}$ ir $\vec{ON}$ koordinates.

3. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\vec{OM}$ ir $\vec{ON}$ kosinusą.

(2) $M(2;\sqrt{3})$; $O(0;0)$

(x) $\vec{OM} = 2-0 = 2$ Ats.: $\vec{OM}(2;\sqrt{3})$

(y) $\vec{OM} = \sqrt{3}-0 = \sqrt{3}$

$N(3{,}5;\frac{\sqrt{3}}{2})$; $O(0;0)$

(x) $\vec{ON} = 3{,}5-0 = 3{,}5$ Ats.: $\vec{ON}(3{,}5;\frac{\sqrt{3}}{2})$

(y) $\vec{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2}-0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $|\vec{OM}|\cdot|\vec{ON}|\cdot\cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$. $|\vec{OM}| = \sqrt{2^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{7}$; $|\vec{ON}| = \sqrt{3{,}5^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{13}$

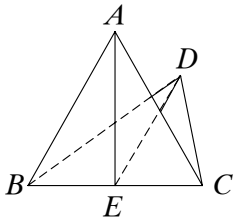
$\sqrt{7}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\alpha = 2\cdot 3{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}$ $\sqrt{91}\cdot\cos\alpha = \frac{21+2\sqrt{3}}{3}$. $\cos\alpha = \frac{21+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{91}}{3\sqrt{91}\cdot\sqrt{91}}$?

$\cos\alpha = \frac{21+2\sqrt{273}}{273}$

Ats.: $\cos\alpha = \frac{21+2\sqrt{273}}{273}$?

18 pav. 14 uždavinio sprendimo 5 pavyzdys

15. Du lygiašoniai trikampiai ABC ir DBC turi bendrą pagrindą BC, kurio ilgis 16 cm. Trikampių plokštumos sudaro 60° kampą, $AB = AC = 17$ cm, $BD \perp DC$, E – atkarpos BC vidurio taškas.



1. Įrodykite, kad $\angle AED = 60^\circ$. *(1 taškas)*

2. Apskaičiuokite kraštinės CD ilgį. *(1 taškas)*

3. Apskaičiuokite atstumą tarp viršūnių A ir D. *(3 taškai)*

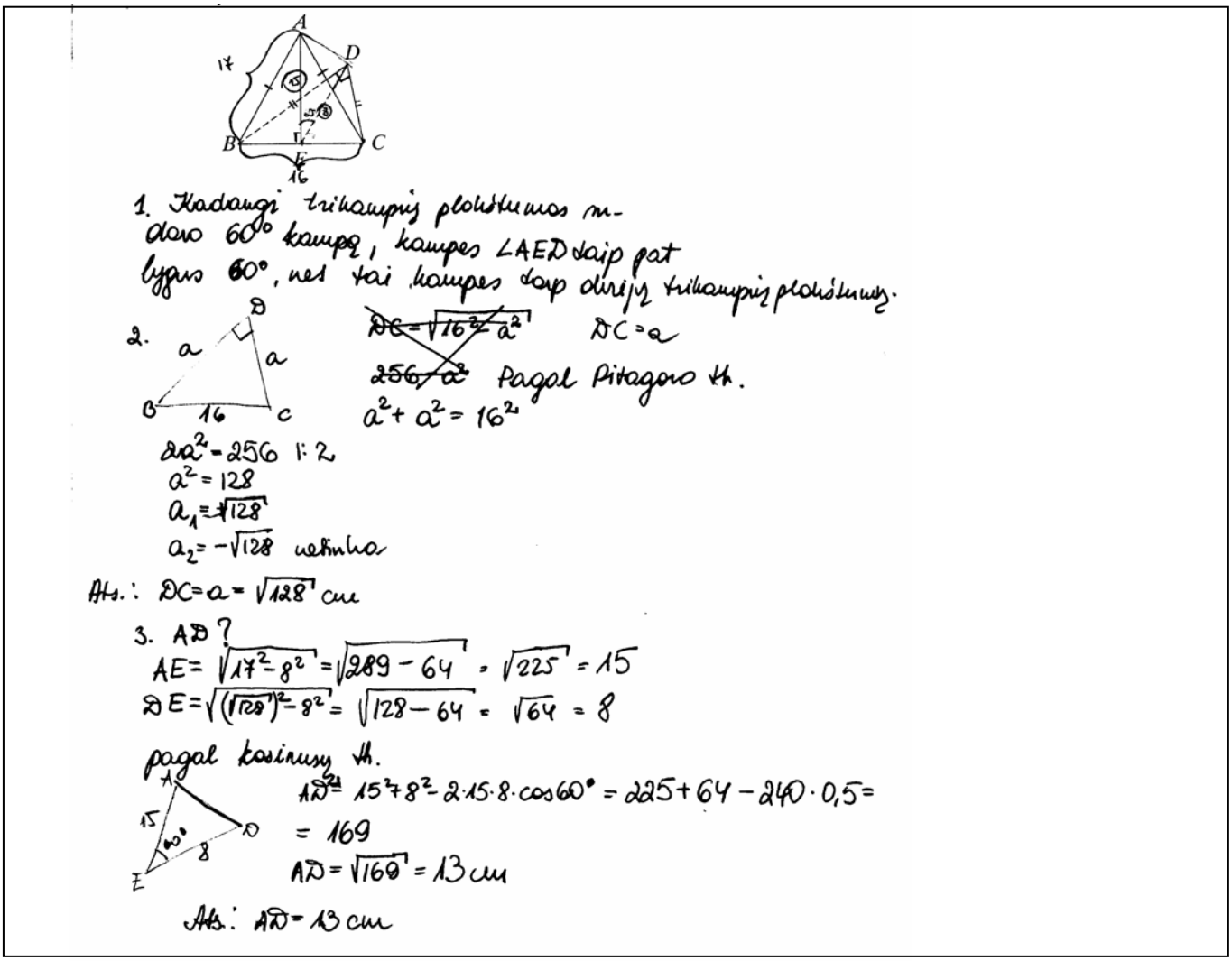
19 pav. 15 uždavinio sąlyga

Tai struktūrizuotas geometrijos uždavinys (planimetrijos ir stereometrijos). Pirmųjų dalių rezultatai turi būti taikomi trečioje uždavinio sprendimo dalyje.

Stereometrijos žinių (apie kampo tarp plokštumų matavimą) reikia tik pirmoje (įrodymo) dalyje. Įrodymas yra nesunkus, bet reikalaujantis gebėjimo nuosekliai ir sklandžiai pateikti argumentus.

Antrąja uždavinio dalimi tikrinama, ar mokinys geba taikyti Pitagoro teoremą lygiašonio stačiojo trikampio statiniui rasti, kai žinomas įžambinės ilgis. Trečiąją uždavinio dalį galima išspręsti taikant kosinusų teoremą. Todėl būtina žinoti, kad $\angle AED = 60^\circ$.

Nagrinėjant konkrečius sprendimus krinta į akis tai, kad įrodymo dalis buvo pati sunkiausia. Daliai mokinių įrodomasis faktas buvo tarsi savaime aiškus (žr. 20 pav.). Nemažai yra darbų, kuriuose bandoma dėstyti teiginį pagrindžiančius argumentus, bet pritrūksta arba žinių, arba gebėjimo aiškiai reikšti mintis (žr. 21, 22 ir 23 pav.). Pateiktų pavyzdžių antroji ir trečioji užduotys yra išspręstos teisingai.



20 pav. 15 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

1. Jei 2 plokštumos susikirsdamos sudaro 60° kampą, tai jomis priklausančios tiesės susikirtusios taip pat sudaro 60° kampą
AE ∈ plokštumai ABC, ED ∈ plokštumai BDC, tai ~~kampas~~ ∠AED = 60°

21 pav. 15 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

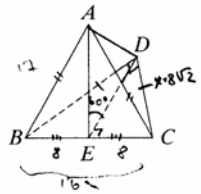
③ AE yra Δ ABC statmuo, nes lygiašonio trikampio pagrindo vidurio taškas ir viršūnė yra to trikampio statmens galų taškai.
Analogiškai DE yra Δ BDC statmuo.
~~Už čia AE ir DE~~ Kadangi AE priklauso ΔBAC, o DE – ΔBDC, ir trikampių plokštumos sudaro 60° kampą, tai ir ∠AED = 60°

22 pav. 15 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

1) AE – ΔACB aukštinė, DE – Δ BDC aukštinė
ΔACB pagrindas BC, Δ BDC pagrindas BC
Trikampių ACB ir BDC plokštumos sudaro 60° kampą (duota sąlygoje), todėl ∠AED = 60° Įrodyta.

23 pav. 15 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Pavyko rasti ir gana aiškiai aprašytų sprendimų (žr. 24 pav.). Tačiau yra darbų, kuriuose visai neįrodinėjama, kad $\angle AED = 60^\circ$, o tik skaičiuojama (žr. 25 pav.).



④. ΔBAC - lygiašonis ⇒ AE – pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė ⇒
⇒ AE ⊥ BC
ΔBDC – lygiašonis ⇒ DE – pusiaukraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė ⇒ DE ⊥ BC
Kampas tarp trikampių plokštumų – tai kampas tarp besikertančių tų trikampių aukštinių ⇒ tai ~~kampas~~ ∠AED – kampas tarp trikampių plokštumų ⇒ ∠AED = 60°

②. ΔBDC – statusis ir lygiašonis, DC = x, tai pagal Pitagoro teoremą:
$x^2 + x^2 = BC^2$
$2x^2 = 256$
$x^2 = 128$
$x_1 = -8\sqrt{2}$ (netinka, nes ilgis tik teigiamas sk.)
$x_2 = 8\sqrt{2}$
$DC = x = 8\sqrt{2}$ (cm) Atsakymas: $8\sqrt{2}$ (cm)

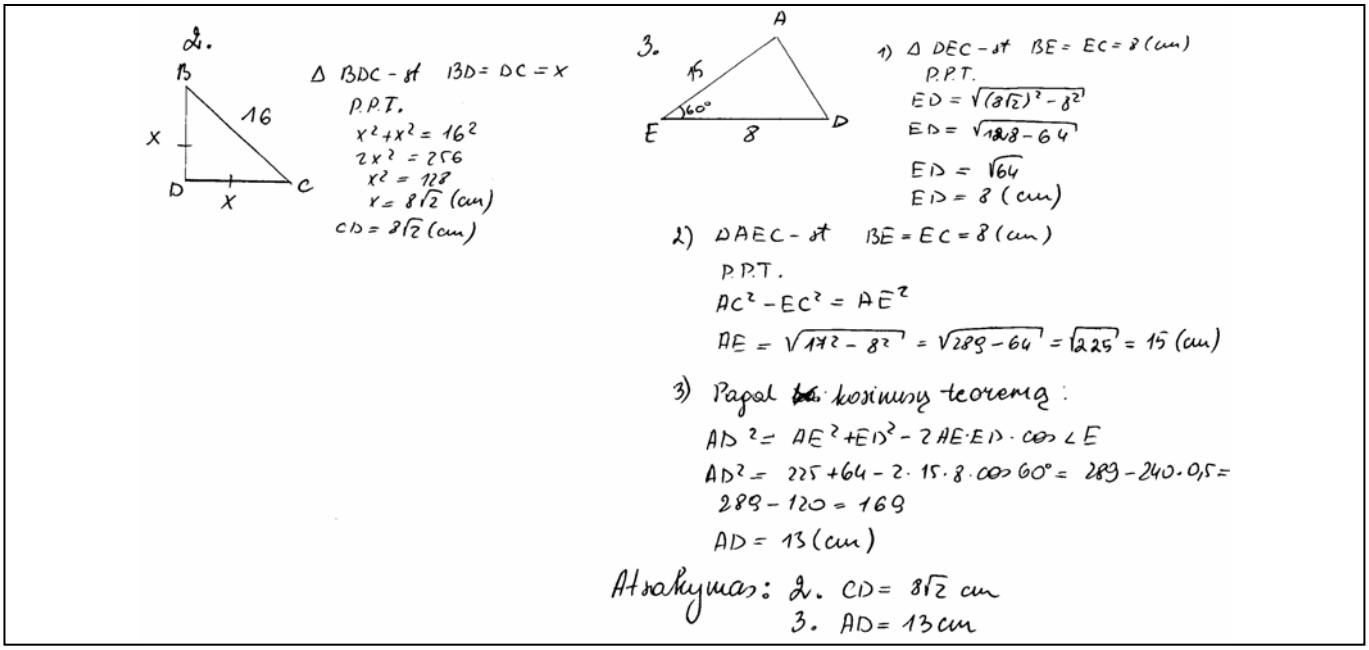
③. a) Iš Δ BCD pagal Pitagoro teoremą
$DE^2 = (8\sqrt{2})^2 - 8^2 = 128 - 64 = 64$
$DE = \sqrt{64} = 8$ (cm)

b) Iš Δ BAC pagal Pit. t.:
$AE^2 = 17^2 - 8^2 = 225$
$AE = 15$ (cm)

Iš Δ AED pagal kosinusų teoremą:
$AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \cos 60^\circ$
$AD^2 = 225 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 0{,}5 = 289 - 120 = 169$
$AD = \sqrt{169} = 13$ (cm)

Atsakymas: 13 cm

24 pav. 15 uždavinio sprendimo 5 pavyzdys



25 pav. 15 uždavinio sprendimo 6 pavyzdys

Atkreiptinas dėmesys į tokių darbų vertinimą. Skaičiuojant atkarpos *AD* ilgį yra taikoma kosinusų teorema, bet neįrodoma, kad $\angle AED = 60^\circ$ (remiamasi pirmoje uždavinio dalyje suformuluota užduotimi tarsi teiginiu). Nagrinėtuose mokinių darbuose už tokius sprendimus (jei tik nepasitaikė skaičiavimo klaidų) buvo skiriamas maksimalus trijų taškų įvertinimas. Vertinimo instrukcijoje (žr. 26 pav.) šis vertinimo aspektas visai nutylėtas.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
15		**5**	
1		1	
	$\angle AED$ yra kampas tarp plokštumų (*ABC*) ir (*BDC*), nes $AE \perp BC$ ir $DE \perp BC$ kaip lygiašonio trikampio aukštinės (*E* – *BC* vidurio taškas, o lygiašonio trikampio pusiaukraštinė ir aukštinė sutampa).	• 1	Už teisingą įrodymą.
2		1	
	ΔBDC – statusis lygiašonis. Pagal Pitagoro teoremą: $2CD^2 = BC^2$, $CD = \sqrt{\frac{16^2}{2}} = 8\sqrt{2}$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą *CD*.
3		3	
	Iš stačiojo ΔBAE: $AE^2 = BA^2 - BE^2$, $AE^2 = 225$, $AE = 15$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą *AE*.
	Iš stačiojo ΔCED: $ED^2 = CD^2 - EC^2$, $ED^2 = 64$, $ED = 8$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą *ED*.
	Iš ΔAED: $AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2AE \cdot ED \cdot \cos 60^\circ$, $AD^2 = 225 + 64 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, $AD = 13$ (cm).	• 1	Už teisingai apskaičiuotą *AD*.

26 pav. 15 uždavinio vertinimo instrukcija

16. Uždaros stačiakampio gretasienio formos dėžės pagrindas – kvadratas, dėžės tūris 320 dm^3. Medžiagos, iš kurios padarytas dėžės dangtis ir dugnas, 1 dm^2 yra 5 kartus brangesnis už sienoms sunaudotos medžiagos 1 dm^2.

1. Parodykite, kad tokiai dėžei pagaminti reikalingos medžiagos kaina $g(x)$ nusakoma formule: $g(x) = k\left(10x^2 + \frac{1280}{x}\right)$, čia k – sienos medžiagos 1 dm^2 kaina litais, x – pagrindo kraštinės ilgis decimetrais.

(3 taškai)

2. Kokie turi būti šios dėžės matmenys, kad išlaidos medžiagoms būtų mažiausios?

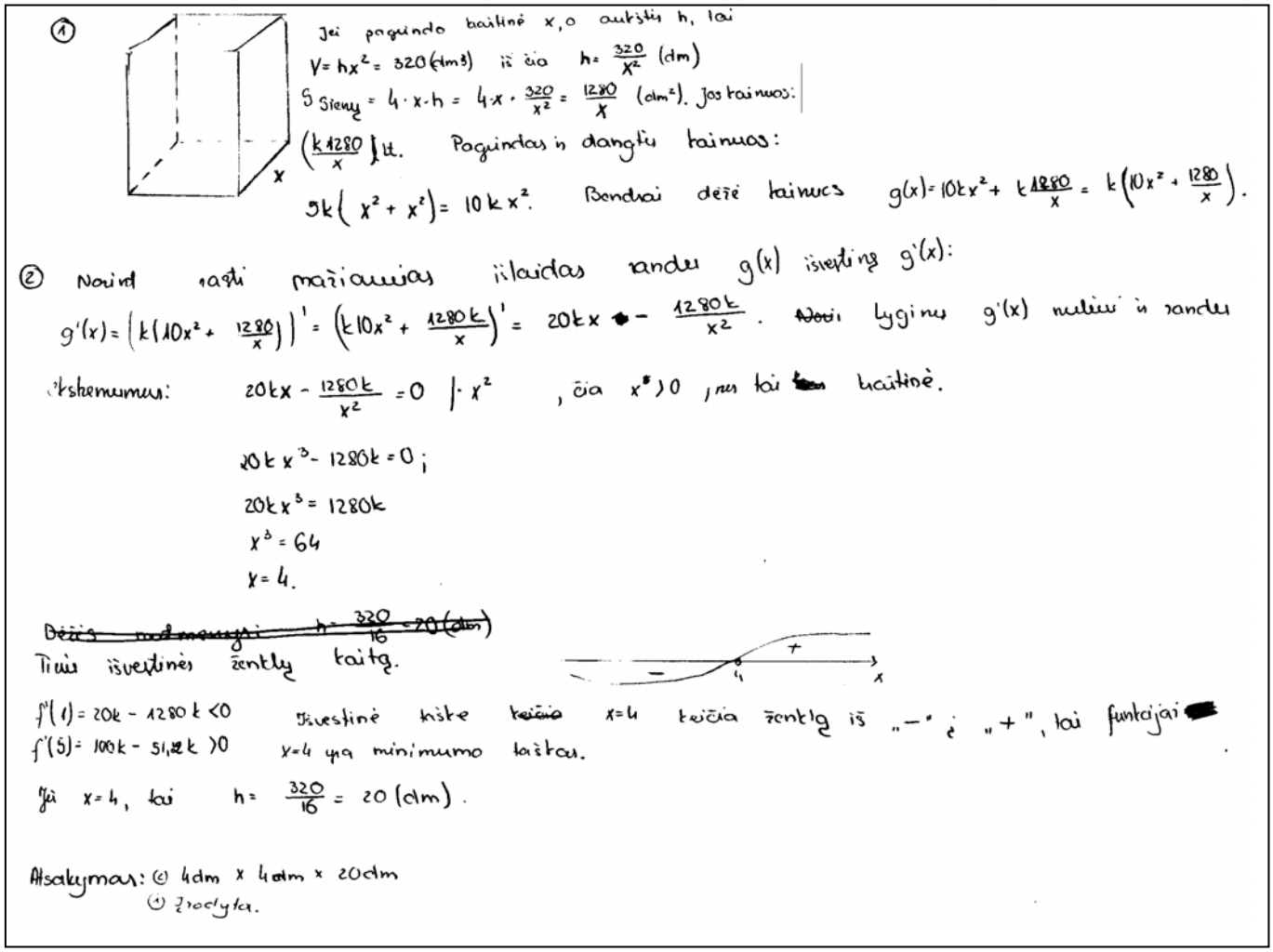
(2 taškai)

27 pav. 16 uždavinio sąlyga

Šis uždavinys priskirtinas probleminių geometrijos ir funkcijų teorijos uždavinių grupei. Pirmoje dalyje yra reikalaujama įrodyti tam tikrą teiginį, tačiau iš tikrųjų reikalaujama tik apskaičiuoti dėžei pagaminti reikalingos medžiagos kainą ir gautą skaičiavimo algoritmą palyginti su parašyta formule. Vis dėlto tas skaičiavimas reikalauja tam tikrų geometrijos žinių bei gebėjimo sudaryti skaičiavimo algoritmą. Taigi ir matematiniu, ir problemiškumo aspektu šis uždavinys yra geras.

Sprendžiant antrąją uždavinio dalį, Ferma teoremos taikymas ekstremumams rasti iš esmės yra neišvengiamas, todėl neturėtų būti rimtesnių diskusijų dėl šios užduoties tinkamumo egzaminui.

Ką matome nagrinėdami mokinių sprendimus? Vaizdas gana margas – nuo logiškai aprašytų (žr. 28 ir 29 pav.) iki juodraštinio lygio (žr. 30 pav.) bei tuščių puslapių.

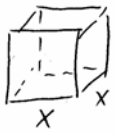


28 pav. 16 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

1) Pažymėję dėžės aukštį y, gauname
$V = x^2 \cdot y$; $x^2 \cdot y = 320$; $y = \frac{320}{x^2}$ (dm).
Ongno plotas lygus ~~pa~~ viršaus plotui. Todėl jų suma lygi $2x^2$. (kvadrato ploto formulė). Jų kaina lygi $2x^2 \cdot 5k$, nes 5 kartus brangesni nedž.
Vienos sienos plotas būtų skaičiuojamas $x \cdot y$. Įstatę y išraišką, gauname
$x \cdot \frac{320}{x^2} = \frac{320}{x}$ (dm²). 4 sienų plotas — $4 \cdot \frac{320}{x} = \frac{1280}{x}$. Jų kaina — $\frac{1280}{x} \cdot k$. visos nedž. kaina, $g(x) = 10x^2k + \frac{1280}{x}k = k\left(10x^2 + \frac{1280}{x}\right)$.

2. Randame $g(x)$ išvestinę
$g'(x) = \left(10kx^2 - \frac{1280k}{x}\right)' = 2 \cdot 10kx - \frac{(1280k)' \cdot x - 1280k \cdot x'}{x^2} = 20kx - \frac{1280k}{x^2} =$
$= 20kx - \frac{1280k}{x^2}$ (~~atkreipsim~~)
~~Atkreipsim dėmesį, kad išvedinys bus mažesnio laipsnio di~~
Randame kritinio taško:
$g'(x) = 0$
$20kx - \frac{1280k}{x^2} = 0$; $k\left(20x + \frac{1280}{x^2}\right) = 0 \mid : k$, nes kaina neišeis 0
$20x - \frac{1280}{x^2} = 0 \mid \cdot x^2$, matmenys negali būti lygūs 0
$20x^3 - 1280 = 0$
$x^3 = \frac{1280}{20}$
$x = 4$. Sikiniame su tais minimumo taškais
$g(x)$ $-$ $+$
$g'(x)$ ↘ 4 ↗
Taškas x yra $g(x)$ minimumas. Todėl dėžės matmenys turėtų būti:
Aukštis 4 (dm), Pleštas 4 (dm), aukštis $\frac{320}{4^2} = 20$ (dm)

29 pav. 16 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

$g(x) =$ 

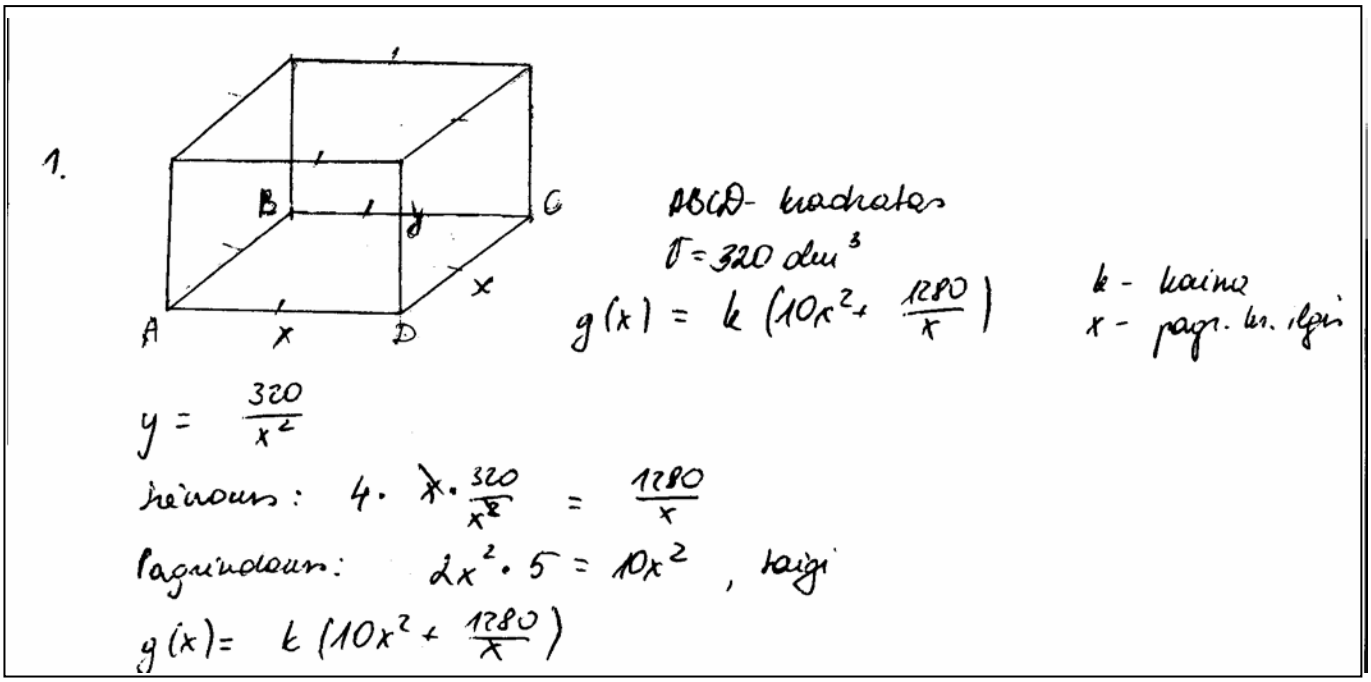
$\frac{320}{x^2}$

1) $g(x) = 2 \cdot x^2 \cdot 5k + 4 \cdot \frac{320}{x^2} \cdot x \cdot k = 10kx^2 + \frac{1280x}{x^2}k =$
$= k\left(10x^2 + \frac{1280}{x}\right)$
tapatybė įrodyta.

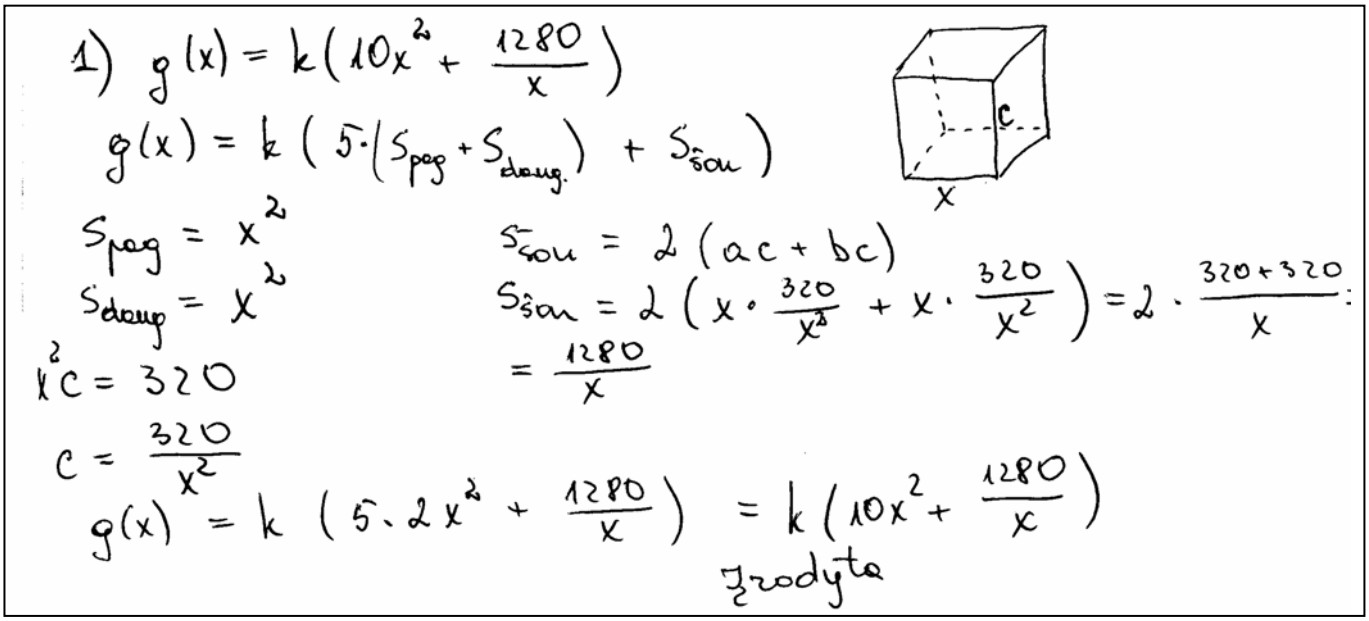
2) $g'(x) = k\left(10 \cdot 2x + 1280 \cdot (-1) \cdot x^{-2}\right) = k\left(20x - \frac{1280}{x^2}\right)$
išvaizdos maziausios kai $g'(x) = 0$
$k\left(20x - \frac{1280}{x^2}\right) = 0$
$20x - \frac{1280}{x^2} = 0$
$\frac{20x^3 - 1280}{x^2} = 0$, $x \neq 0$
$x = 4$
$x \neq 0$
min
$-$ $+$
4 x
$r = 4$ dm, $\frac{320}{x^2} = h$ $h = 20$ dm matmenys: $4 \times 4 \times 20$
Atsakymas: matmenys turėtų būti $4 \times 4 \times 20$ dm

30 pav. 16 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Įrodymo dalyje dominuoja tiesioginiai išlaidų skaičiavimai, tačiau nemažai mokinių lyg ir įrodinėja (žr. 31 bei 32 pav.), bet, matyt, sunkiai suvokdami, ką iš tikrųjų turėtų padaryti. Peršasi mintis, kad daugiau mokinių būtų gavę reikiamą išlaidų formulę, jei sąlyga būtų buvusi be „parodykite, kad…“.



31 pav. 16 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

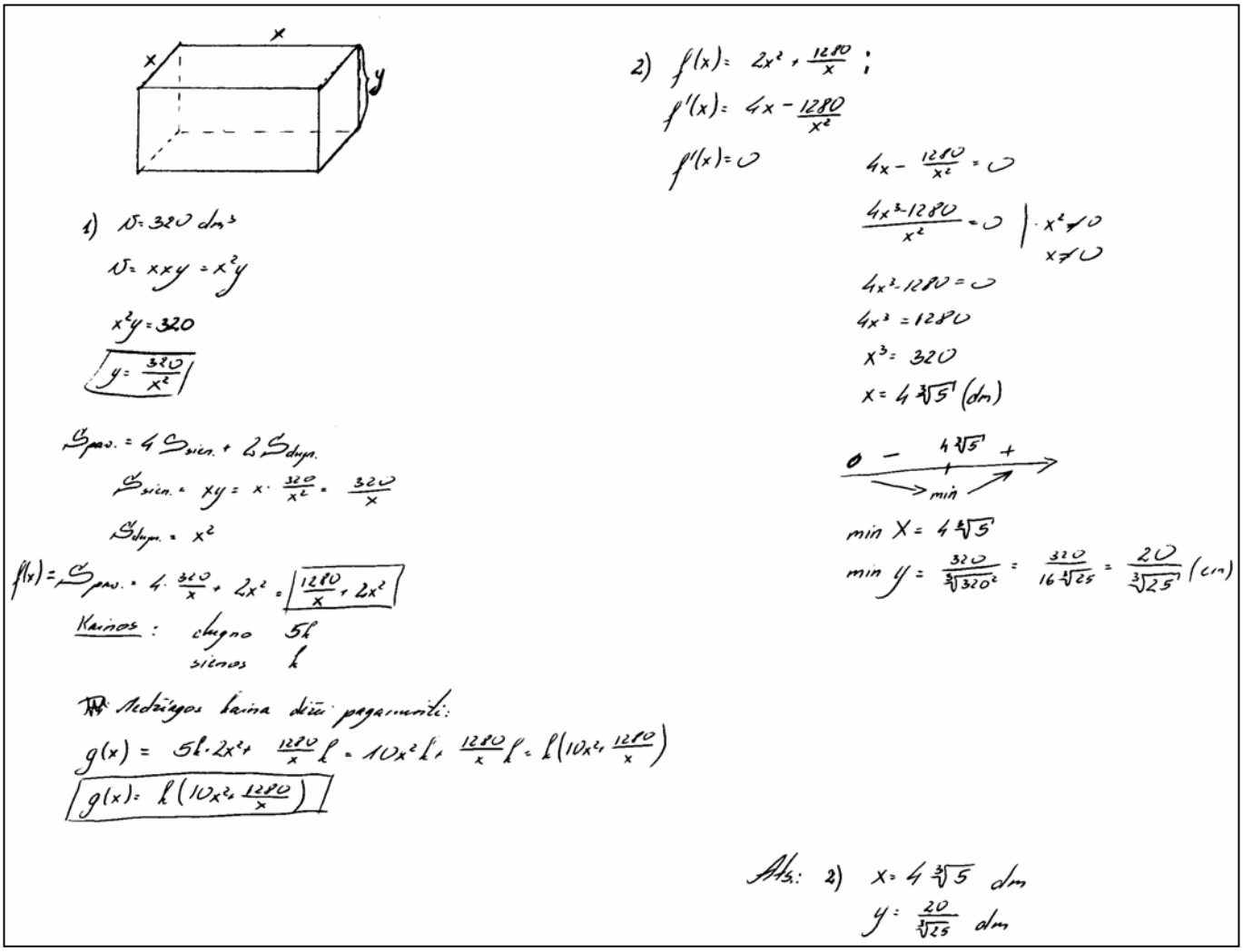


32 pav. 16 uždavinio sprendimo 5 pavyzdys

Mažiausių išlaidų skaičiavimas daugeliui mokinių irgi buvo labai mįslingas dalykas, nes neretai jie pasirinkdavo ne tą tikslo funkciją ekstremumui rasti (žr. 33 pav.). Pasitaikė ir tokių samprotavimų: „Kad išlaidos būtų mažiausios, dangčio ir dugno plotai turi būti mažiausi“; „Išlaidos medžiagoms bus mažiausios tada, kai pagrindo matmenys (x) bus mažiausi“.

Matyt, tai susiję su tuo, kad išlaidų formulėje pagrindo kraštinės ilgis yra x.

Nemažai yra darbų (tarp išnagrinėtų), kuriuose mažiausios išlaidos visai neskaičiuojamos. Galbūt tai galima paaiškinti įpročiu spręsti uždavinius, kurių formuluotė „standartinė“.



33 pav. 16 uždavinio sprendimo 6 pavyzdys

III. FUNKCIJOS IR ANALIZĖS PRADMENYS

Tai tradicinė matematikos mokymo sritis. Mokytojai turi pakankamai patirties ją dėstydami, o mokymo priemonėse daug įvairiausių uždavinių. 2005 metų matematikos valstybinio brandos egzamino užduotyje funkcijų ir analizės pradmenų srities žinios tikrinamos 2, 3, 6, 8, 10, 11, 13 ir 17 uždaviniais. Įprastų formuluočių, gana lengvi lyginant su tais, kuriuos tekdavo spręsti pamokų metu, buvo egzamino užduoties 2, 3, 6, 10, 11 ir 13 uždaviniai. 8 ir 17 yra ne visai tradicinių formuluočių, abiturientai juos prastai sprendė, nors naujuose vadovėliuose gausu ir sudėtingesnių uždavinių. Matyt, todėl beveik visi laikiusieji egzaminą bandė šiuos uždavinius spręsti. Deja, rezultatai nėra džiuginantys. Daugumoje uždavinių buvo tikrinamas supratimas, o ne sudėtingų algoritmų taikymas, kuriam kol kas daugiausia laiko skiriama baigiamųjų klasių matematikos pamokose.

Kaip ir ankstesniais metais, mokiniai geriau sprendė uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais.

Aptarkime konkrečius uždavinius.

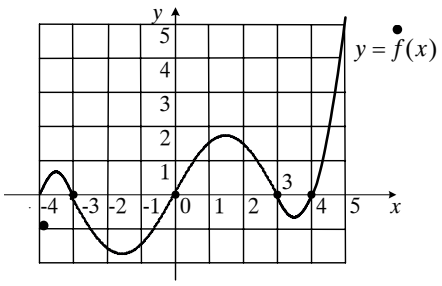
2. Kai $\cos\alpha = \frac{9}{41}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$

A $-\frac{40}{41}$ **B** $\frac{41}{42}$ **C** $\frac{40}{41}$ **D** $-\frac{9}{41}$ **E** $-\frac{32}{41}$

34 pav. 2 uždavinio sąlyga

Mokiniams šis uždavinys buvo sunkus, tik trečdalis pasirinko teisingą atsakymą. Pagal pasirinktus atsakymus galima tik spėlioti, kokios yra mokinių žinių bei įgūdžių spragos. Galima manyti, kad mokiniai netaiko redukcijos formulių (net 36 proc. mokinių rinkosi atsakymą D), nežino, kada trigonometrinės funkcijos įgyja teigiamas ir kada neigiamas reikšmes (nes daugiau kaip 13 proc. mokinių rinkosi atsakymą C). Uždavinys gana gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusius mokinius.

3. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$, $x \in [-4; 5]$, grafiko eskizas. Nurodykite intervalą, kuriam priklauso lygties $f(x) = 3$ sprendinys.



A $[-3; 1)$ **B** $[2; 4)$ **C** $(-4; -2]$ **D** $(4; 5]$ **E** $(2; 4)$

35 pav. 3 uždavinio sąlyga

Šiuo uždaviniu buvo tikrinamas mokinių gebėjimas remtis funkcijos grafiko eskizu. Tokių uždavinių pakankamai daug nagrinėjama pagrindinės mokyklos kurse, o baigiamosiose klasėse dažniau kalbama apie lygčių algebrinį sprendimą ir konkrečių funkcijų tyrimą, jų grafikų braižymą, taigi sprendžiami kitokie uždaviniai. Tik apie 67 proc. mokinių pasirinko teisingą atsakymą (neatmetama ir spėjimo galimybė).

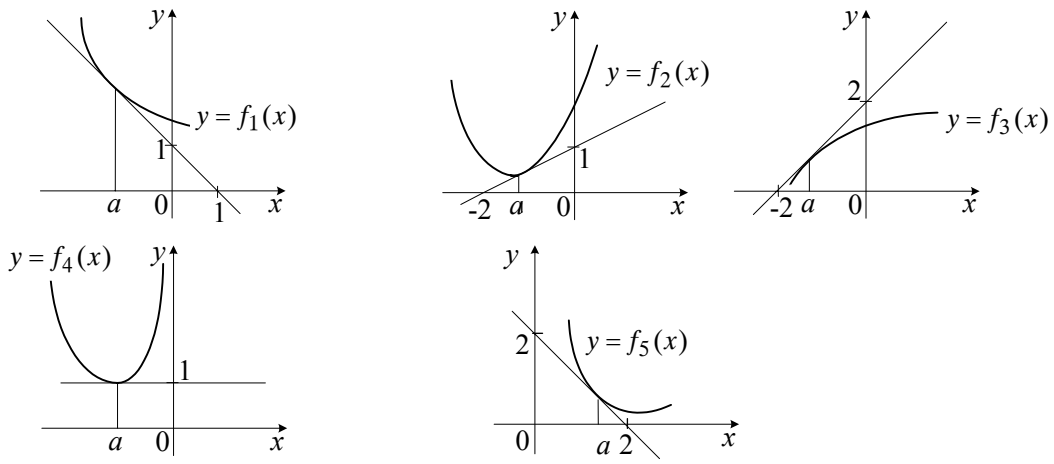
6. Funkcijos $y = \lg(x+2) + \sqrt{1-x}$ apibrėžimo sritis yra:

A $(-2; +\infty)$ **B** $(-\infty; 1)$ **C** $[-2; -1]$ **D** $(1; +\infty)$ **E** $(-2; 1]$

36 pav. 6 uždavinio sąlyga

Mokiniams 6 uždavinys buvo lengvas, nes jo formuluotė tradicinė. Tokių uždavinių daug sprendžiama matematikos pamokų metu. Uždavinys gana gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusius mokinius.

8. Paveiksle pavaizduoti funkcijų grafikų eskizai ir jų liestinės taške, kurio abscisė $x = a$.



Nurodykite teisingą teiginį.

A $f_1'(a) = 1$ **B** $f_2'(a) = 1$ **C** $f_3'(a) = 1$ **D** $f_4'(a) = 1$ **E** $f_5'(a) = 1$

37 pav. 8 uždavinio sąlyga

Tai supratimo apie išvestinės geometrinę prasmę tikrinimo uždavinys. Statistika rodo, kad šis uždavinys mokiniams buvo sunkus (15,75 proc. teisingų atsakymų). Iš dalies galima pateisinti atsakymus $f_1'(a) = 1$ (10,25 proc.) ir $f_5'(a) = 1$ nepakankamu įsigilinimu į sąlygą. Didžiausią nuostabą kelia atsakymo $f_4'(a) = 1$ pasirinkimas, nors grafiko liestinė taške $(a; f_4(a))$ yra lygiagreti su ašimi *Ox*. Šį atsakymą pasirinko net 54,75 proc. mokinių. Tai galima manyti, kad vidurinėje mokykloje esama rimtų spragų formuojant funkcijos išvestinės sąvoką.

10. Pažymėta: $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Išreikškite $\log_{27} 45$ dydžiais a ir b.

(2 taškai)

38 pav. 10 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija (žr. 39 pav.).

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
10		**2**	
	$\log_{27} 45 = \frac{\lg 45}{\lg 27} = \frac{\lg 5 + 2\lg 3}{3\lg 3} = \frac{a+2b}{3b}$.	• 1	Už teisingai pritaikytą logaritmo pagrindo keitimo formulę.
	Ats.: $\frac{a+2b}{3b}$.	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.

39 pav. 10 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (40 ir 41 pav.).

$$\log_{27} 45 = \frac{\lg 45}{\lg 27} = \frac{\lg(5\cdot 9)}{\lg(3\cdot 9)} = \frac{\lg 5 + \lg 9}{\lg 3 + \lg 9} = \frac{\lg 5 + \lg 3^2}{\lg 3 + \lg 3^2} =$$

$$= \frac{\lg 5 + 2\lg 3}{\lg 3 + 2\lg 3} = \frac{\lg 5 + 2\lg 3}{3\lg 3} = \frac{a+2b}{3b}$$

Ats.: $\frac{a+2b}{3b}$

40 pav. 10 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

$$\log_{27} 45 = \log_{3^3} 5\cdot 9 = \frac{1}{3}(\log_3 5 + \log_3 3^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\log_3 5 + 2) = \frac{1}{3}\log_3 5 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\frac{\lg 5}{\lg 3} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{a}{b} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + 2\right)$$

Ats.: $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + 2\right)$

41 pav. 10 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

10 uždavinys yra tradicinis. Daug analogiškų uždavinių yra vadovėliuose ir kitose mokymo priemonėse. Logaritmų tema nagrinėjama baigiant vidurinės mokyklos matematikos kursą, todėl nėra visai pamiršta. Deja, mažiau nei trečdalis mokinių sugebėjo teisingai išspręsti šį uždavinį. Reikėjo žinoti logaritmų savybes ir gebėti teisingai pritaikyti logaritmų pagrindo keitimo formulę (ji buvo pateikta užduotyje), atlikti algebrinius pertvarkius. Pasirodo, dauguma žino tik logaritmo apibrėžimą. Tai buvo gana sunkus uždavinys mūsų abiturientams. Puikiai atsiskyrė geriausiai atlikę visą užduotį mokiniai nuo prasčiausiai sprendusiųjų. Šis uždavinys ypač gerai rodo, kad mokiniai nemoka užrašyti uždavinių sprendimų, nesinaudoja užduotyje pateiktomis formulėmis.

11. Išspręskite lygtį $9^x - 25\cdot 3^x - 54 = 0$.

(3 taškai)

42 pav. 11 uždavinio sąlyga

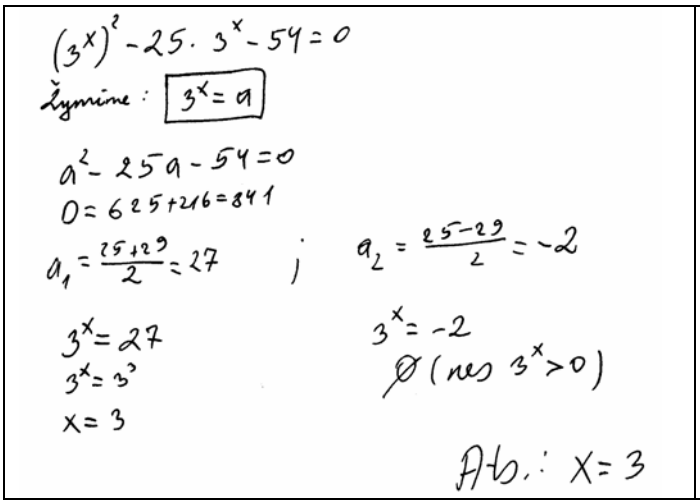
Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
11		**3**	
	$3^{2x} - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$, $3^x = y$, $y > 0$; $y^2 - 25y - 54 = 0$, $y_1 = 27$, $y_2 = -2$, $3^x = 27$, $x = 3$. *Ats.:* $x = 3$.	• 1 • 1 • 1	Už teisingą pradinės lygties pakeitimą kvadratine. Už teisingai išspręstą kvadratinę lygtį. Už gautą teisingą atsakymą.

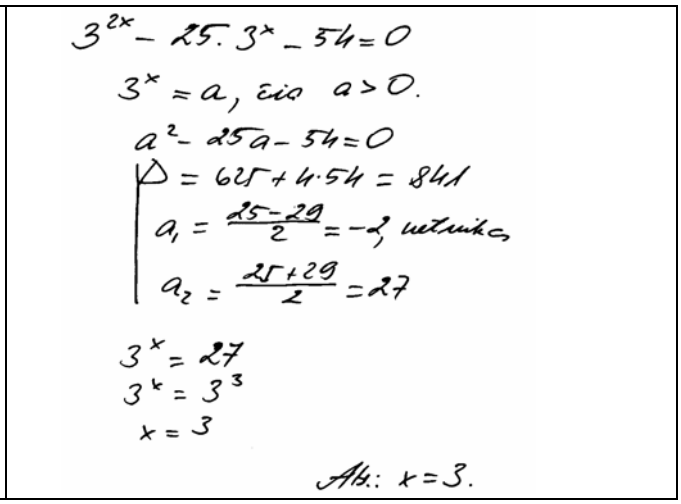
Pastaba. Jeigu sprendime nėra parašyta nei $y>0$, nei prie y_2 parašyta, jog jis netinka, 1 taškas **neskiriamas**.

43 pav. 11 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (žr. 44 ir 45 pav.).



44 pav. 11 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



45 pav. 11 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Rodiklinės funkcijos įeina į vidurinės mokyklos baigiamųjų klasių kursą, panašių lygčių daug sprendžiama pamokų metu. Sprendimo algoritmas tradicinis – tereikėjo pastebėti, kad lygtį galima suvesti į kvadratinę ir ją išspręsti. Šis uždavinys buvo lengvas mokiniams, net du trečdaliai jį išsprendė teisingai. Mažiau nei penktadalio darbai įvertinti 0 taškų. Uždavinys gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusius mokinius. Būdingos klaidos – mokiniai darė aritmetinių klaidų arba išsprendę kvadratinę lygtį pamiršo apie keitinį. Netikėtas buvo mokinio bandymas parinkti x reikšmę ir patikrinti, ar ji yra sprendinys. Iš užrašų matyti, kad su skaičiuokliu gana greitai pavyko nustatyti sprendinį.

13. Duota lygtis $(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1 - x^2} = 0$.

1. Nustatykite nežinomojo x leistinųjų reikšmių aibę.

(2 taškai)

2. Išspręskite lygtį.

(3 taškai)

46 pav. 13 uždavinio sąlyga

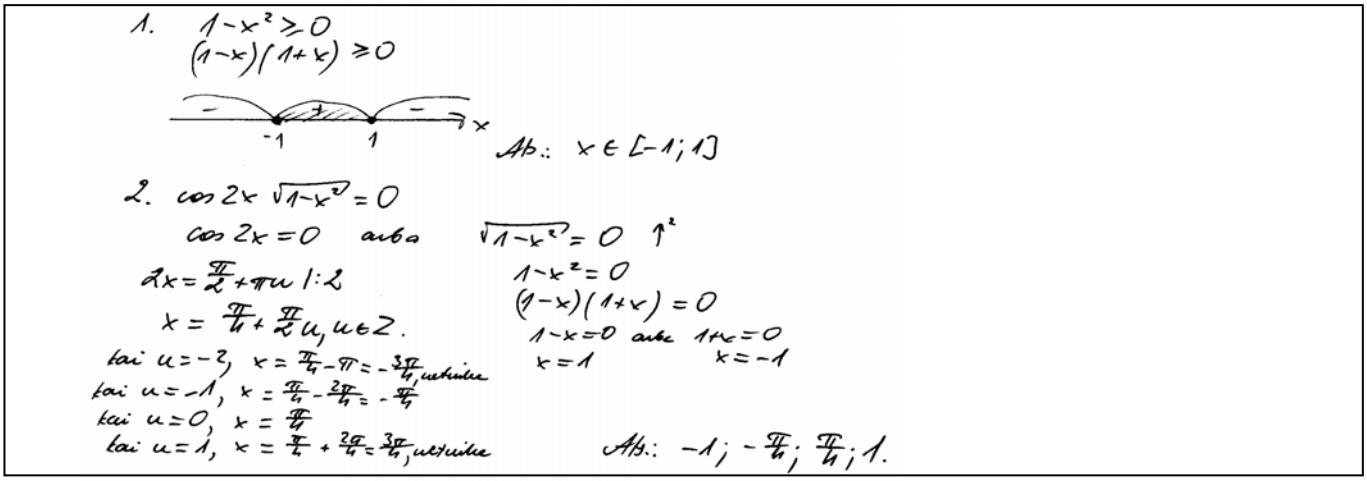
Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
13		**5**	
1		2	
	$1-x^2 \geq 0$. *Ats.:* $x \in [-1;1]$.	• 1 • 1	Už teisingai sudarytą nelygybę. Už gautą teisingą atsakymą.
2		3	
	$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ arba $1-x^2=0$; $\cos 2x = 0$ arba $1-x^2=0$. $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathrm{Z}$. $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Ats.:* $\pm\frac{\pi}{4}$; ± 1.	• 1 • 1 • 1	Už teisingą lygties pakeitimą lygčių visuma. Už teisingai išspręstą trigonometrinę lygtį. Už teisingą atsakymą.

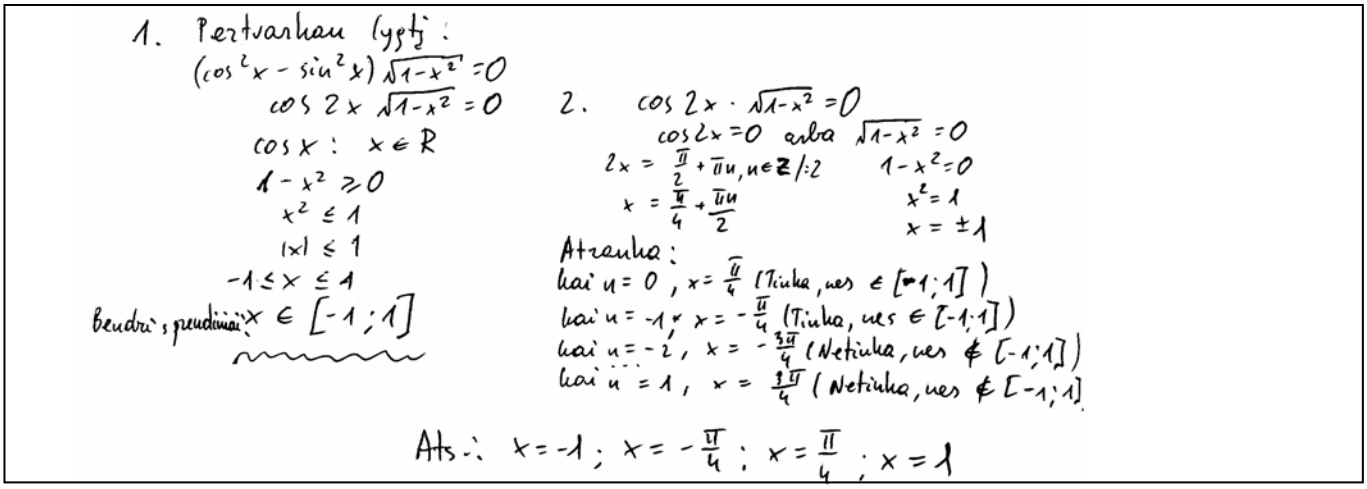
Pastaba. Jeigu lygtis $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ sprendžiama kitu būdu, tai *1 taškas* skiriamas už teisingai išspręstą trigonometrinę lygtį. Jeigu mokinys nerašo bendrojo trigonometrinės lygties sprendinio, o parašo tik $x = \pm\frac{\pi}{4}$, tai skiriamas *1 taškas* tik tuo atveju, jeigu yra pagrįsta, kodėl pasirinkti tik šie trigonometrinės lygties sprendiniai ir dar *1 taškas* skiriamas už galutinį atsakymą $\pm\frac{\pi}{4}; \pm 1$.

47 pav. 13 uždavinio vertinimo instrukcija

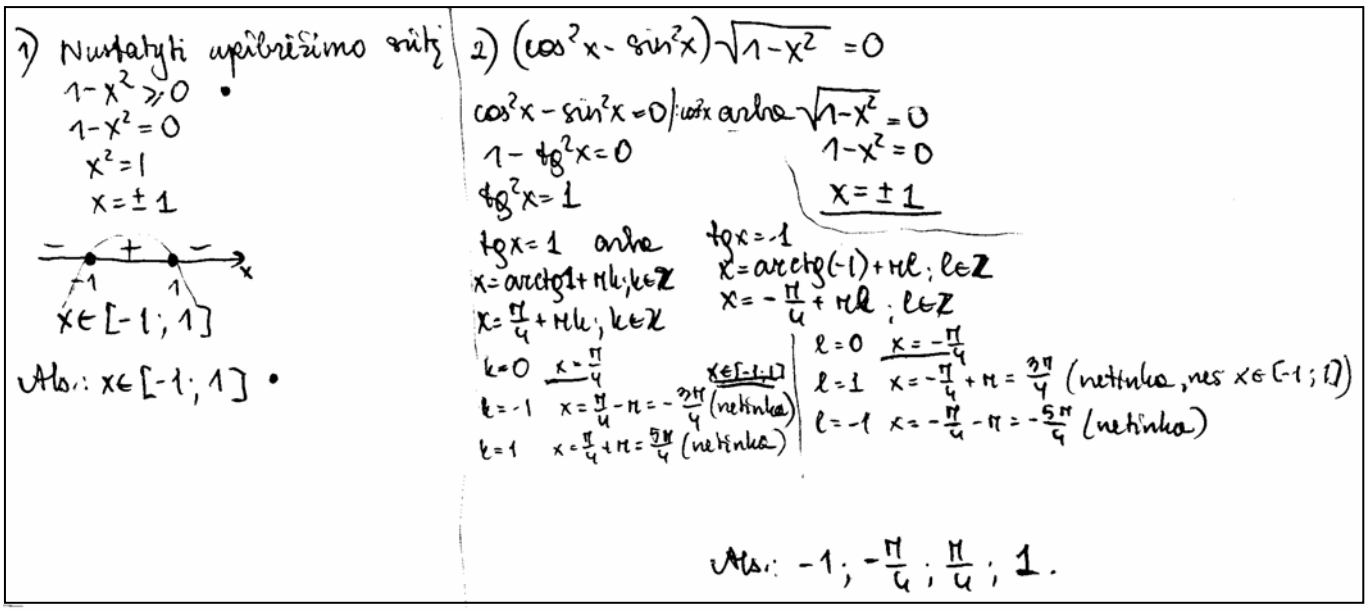
Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (žr. 48, 49 ir 50 pav.).



48 pav. 13 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



49 pav. 13 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

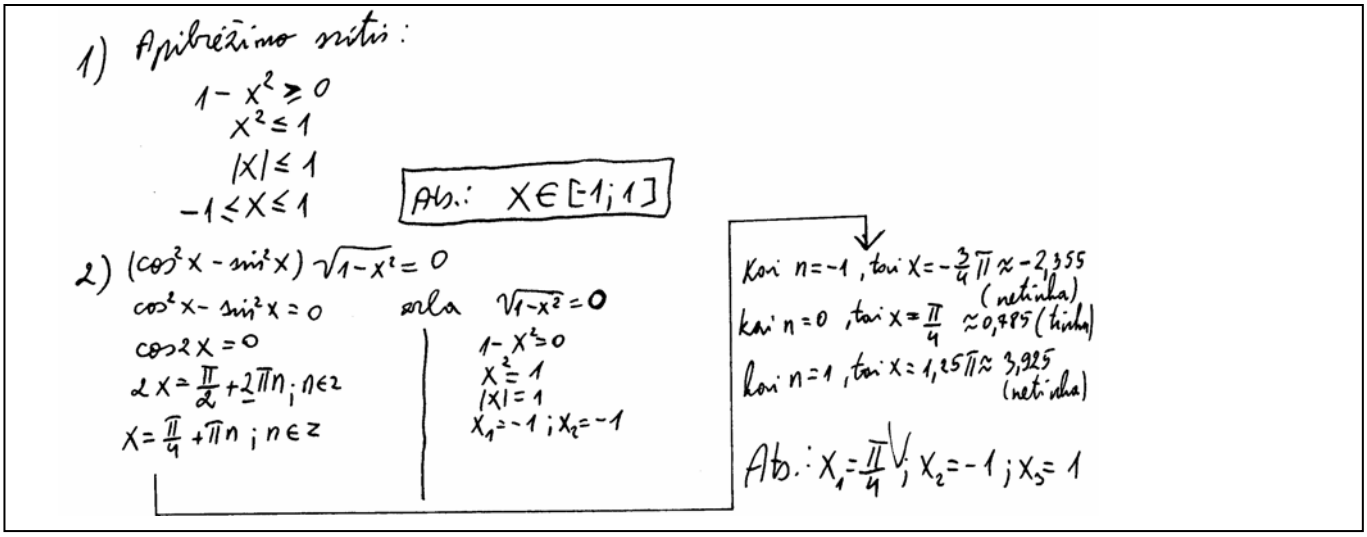


50 pav. 13 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Tai įprastos formuluotės uždavinys. Egzamino užduotyje išskirtos dvi šio uždavinio dalys. Taip palengvintas sprendimas – mokiniams priminta funkcijos leistinųjų reikšmių aibė, kurią jie dažnai pamiršta.

Pirmoji uždavinio dalis gana sunki. Apibrėžimo sritį teisingai nustatė tik trečdalis mokinių. Puikiai atsiskyrė geriausiai atlikę visą užduotį mokiniai nuo prasčiausiai sprendusiųjų. Beveik pusė mokinių gavo po 0 taškų. Uždavinio formuluotė tradicinė (kai kuriuos glumino „nežinomojo x leistinųjų reikšmių aibė“, vietoj įprastos „apibrėžimo srities“), tokių uždavinių daug sprendžiama, nelygybė paprasta, mokymo priemonėse dauguma jų gerokai sudėtingesnės. Daugiau nei penktadalis mokinių, teisingai užrašę nelygybę, negebėjo jos išspręsti. Mažiau taškų surinkę mokiniai darė dažnai pasitaikančią klaidą: $x^2 \le 1$, vadinasi, $x < \pm 1$. Funkcijos apibrėžimo sritį painiojo su reikšmių sritimi ir nemažai taškų surinkę mokiniai. Kai kurie mokiniai mintinai teisingai nustatė leistinųjų reikšmių aibę.

Antroji uždavinio dalis daug sunkesnė už pirmąją. Tik apie 7 proc. mokinių surinko visus galimus taškus. Tačiau šioje dalyje mažiau mokinių gavo 0 taškų (šiek tiek daugiau nei trečdalis). Gana gerai atsiskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusieji mokiniai. Antroje uždavinio dalyje reikėjo pastebėti, kad galima pasiremti pirmosios dalies išvadomis. Deja, dauguma mokinių (net ir daug taškų surinkusių), nors ir teisingai nustatė nežinomojo x leistinųjų reikšmių aibę, bet išsprendę lygtį neatrinko sprendinių, priklausančių minėtai aibei. Nemaža dalis sprendė arba tik trigonometrinę, arba tik iracionaliąją lygtį. Daugelis abiturientų nesugebėjo pertvarkyti trigonometrinės lygties į paprasčiausiąją. Taigi ši dalis mokiniams buvo labai sudėtinga. Nors ir teisingai pertvarkę lygtį mokiniai, darė šias klaidas: užrašė neteisingą periodą (tokio sprendimo pavyzdį žr. 51 pav.), nemokėjo išrinkti sprendinių iš nurodyto intervalo.

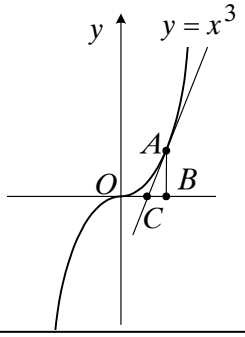


51 pav. 13 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Lyginant su ankstesniais metais mokinių trigonometrijos žinios prastėja. Anksčiau laikytas lengvu uždaviniu dabar jau tampa sunkus daugeliui abiturientų. Gerokai sumažėjo trigonometrijos mokymui skirto pamokų laiko. Vadinasi, arba reikia keisti požiūrį mokymo metu, arba į egzamino užduotį įtraukti dar paprastesnius uždavinius.

17. Per funkcijos $y = x^3$ grafiko tašką A, kurio abscisė x_0 yra teigiama, nubrėžta liestinė AC (žr. pav.). Įrodykite, kad trikampio ABC, kurio kraštinė $AB \perp Ox$, plotas yra dvigubai didesnis už figūros OAC plotą.

(5 taškai)

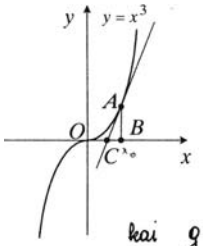


52 pav. 17 uždavinio sąlyga

Pirmiausia šis uždavinys yra priskirtinas funkcijų teorijos sričiai. Iš dalies jis yra geometrinis (trikampio ABC plotą galima apskaičiuoti pagal standartinę formulę $S = \frac{1}{2} CB \cdot BC$), taip pat ir probleminis.

Be integralo $\int_0^{x_0} x^3 dx$ skaičiavimo čia neįmanoma išsiversti. Trikampio ABC plotą galima apskaičiuoti dvejopai – pagal standartinę formulę $S = \frac{1}{2} CB \cdot BC$ arba integruojant. Tačiau ir vienu, ir kitu atveju reikia parašyti liestinės lygtį (ji yra $y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$) ir rasti taško C abscisę $x = \frac{2}{3} x_0$.

Įrodymas šiame uždavinyje yra grindžiamas dviejų figūrų plotų skaičiavimu ir gautų rezultatų santykio radimu. Taigi įrodymo schema yra visiškai aiški. Pakanka suvokti užduotį ir mokėti skaičiuoti.



Įrodymas:

$y = x^3 \qquad y' = 3x_0^2$

$g(x) = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3 =$

$= 3x_0^2 x - 3x_0^3 + x_0^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3.$

kai $g = 0$, tai $3x_0^2 x - 2x_0^3 = 0 \qquad x = \frac{2x_0}{3}.$

$\cancel{S_{OAC} = \int_0^{\frac{2x_0}{3}} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{2x_0}{3}} = \left(\frac{2}{3}x_0\right)^4 \frac{1}{4} = \frac{16x_0^4}{81} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4x_0^4}{81}}$

$S_{OAB} = \int_0^{x_0} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^{x_0} = \frac{x_0^4}{4}.$

$\cancel{S_{\Delta ABC} = \frac{x_0^4}{4} - \frac{4x_0}{81} = \frac{81x_0^4 - 16x_0^4}{324} = \frac{65x_0^4}{324}}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 - \frac{2x_0}{3}\right) \cdot x_0^3 = \frac{1}{6} x_0^4$

$S_{OAC} = S_{OAB} - S_{\Delta ABC} = \frac{x_0^4}{4}^{(3} - \frac{x_0^4}{6}^{(*2} = \frac{\cancel{12x_0}\,3x_0^4 - 2x_0^4}{12} = \frac{x_0^4}{12}$

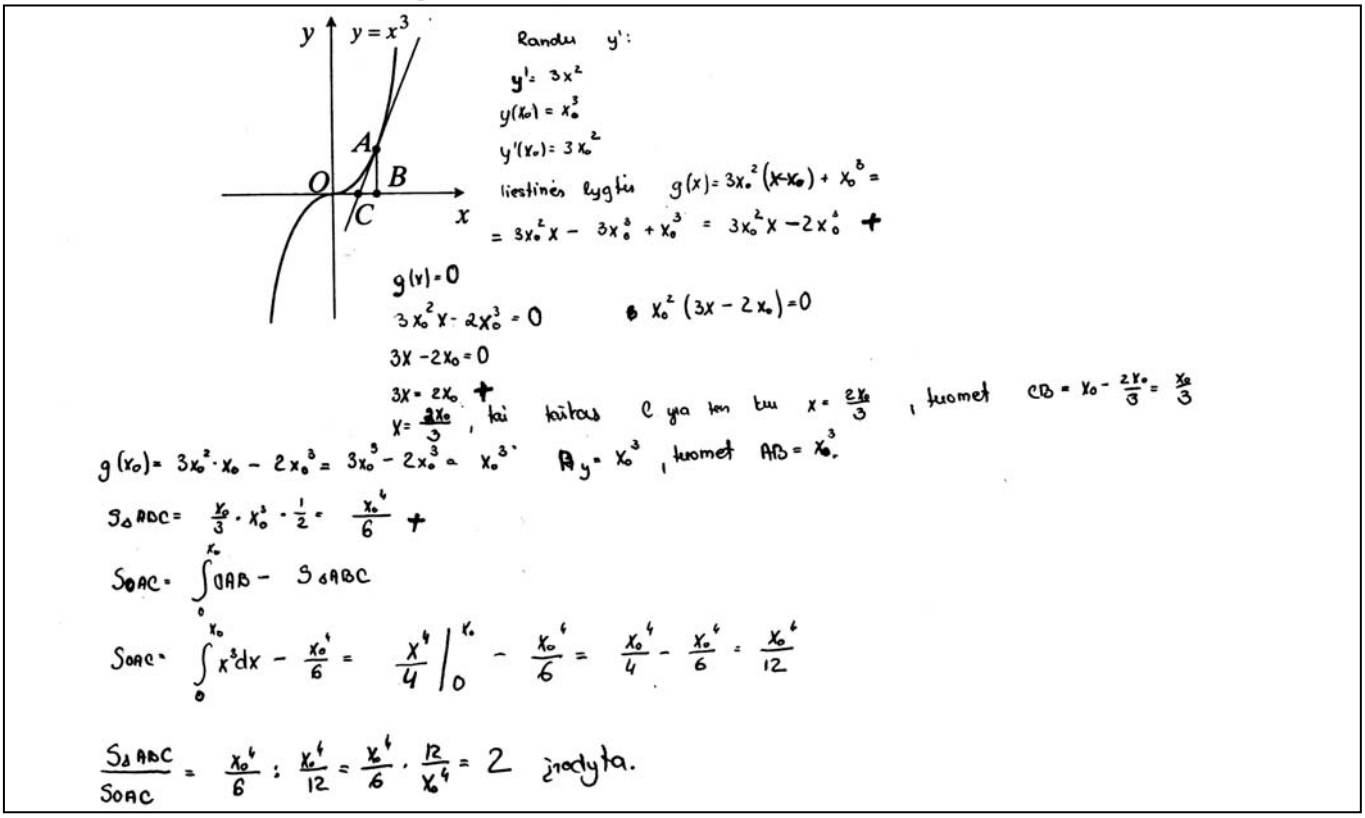
$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{OAC}} = \frac{x_0^4}{6} : \frac{x_0^4}{12} = 2$

53 pav. 17 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

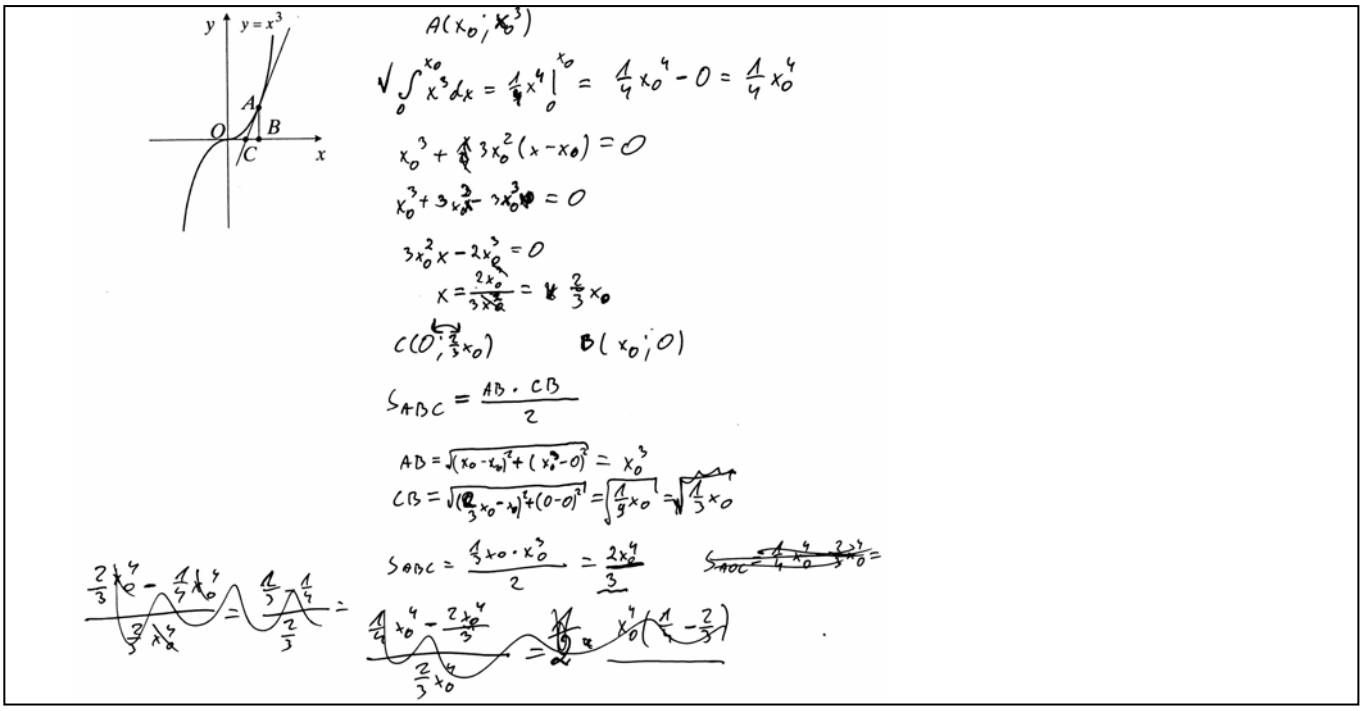
Nagrinėtuose egzamino darbuose pastebima tam tikra sprendimo strategijų įvairovė, tačiau nedaug yra visiškai teisingų sprendimų. Dažniausiai nesusivokiama, kad reikia rasti liestinės *CA* ir koordinačių sistemos ašies *Ox* susikirtimo taško *C* abscisę, daroma elementarių skaičiavimo klaidų.

Iš esmės teisingai išsprendę uždavinius mokiniai kartais nepakankamai paaiškina jų sprendimus (žr. 53 pav.).

Pasitaiko ir nekorektiško integralo simbolio vartojimo atvejų (žr. 54 pav.; čia rašoma: $S_{OAC} = \int_0^{x_0} OAB - S_{\Delta ABC}$).



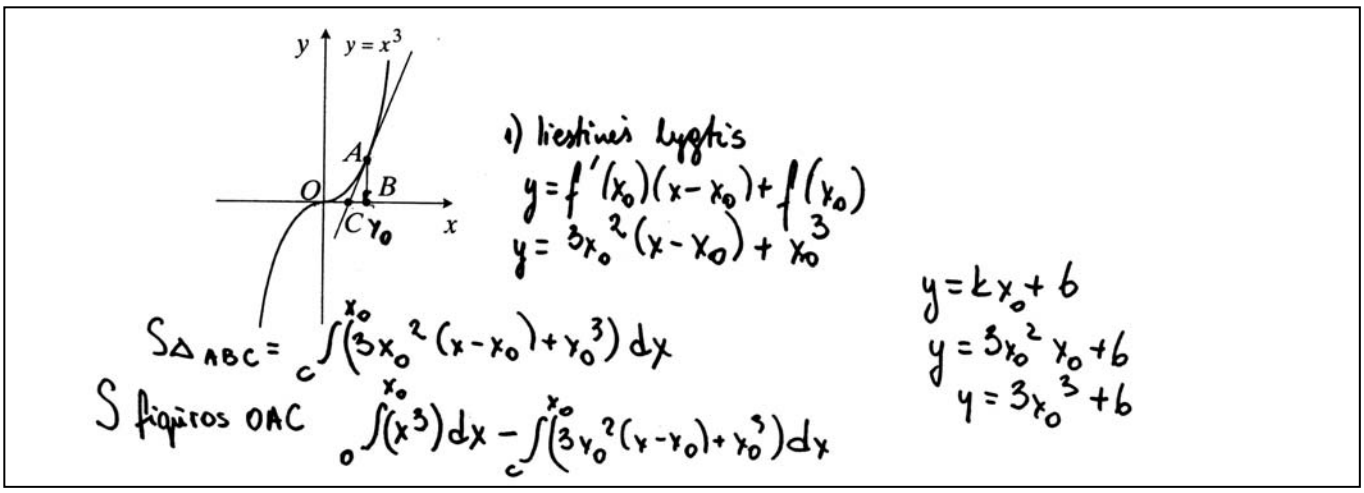
54 pav. 17 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys



55 pav. 17 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Ne vienam egzaminą laikiusiam mokiniui pakenkė elementarios klaidos atliekant veiksmus su trupmenomis. Štai vienas pavyzdys (žr. 55 pav.), kai mokinys suklydo skaičiuodamas plotą S_{ABC} (gavo $\frac{\frac{1}{3}x_0 \cdot x_0^3}{2} = \frac{2x_0^4}{3}$) Jam teko nubraukti sprendimo pabaigą, nors galėjo gauti reikiamą rezultatą.

Kitas pavyzdys (žr. 56 pav.) rodo, kad nepakanka suvokti problemą. Reikia mokėti ir taško C abscisę rasti, ir integralus apskaičiuoti.



56 pav. 17 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

IV. KOMBINATORIKA, TIKIMYBĖS IR STATISTIKA

Šiai sričiai priklauso tik du uždaviniai – vienas su pasirenkamaisiais atsakymais (4) ir vienas struktūruotas (12). Pirmasis yra kombinatorikos uždavinys, antrasis – atsitiktinio dydžio skirstinio sudarymo ir vidurkio (matematinės vilties) skaičiavimo uždavinys.

Kombinatorikos uždavinys yra geras, tačiau jis labiau tiktų trumpo sprendimo skyriui. Tada matytųsi skaičiavimo strategijos spragos ir nereikėtų spėlioti analizuojant prastų rezultatų priežastis.

4. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi triženkliai skaičiai taip, kad šiuose skaičiuose nėra gretimų vienodų skaitmenų. Kiek galima sudaryti tokių skaičių?

A 576 **B** 504 **C** 729 **D** 24 **E** 84

57 pav. 4 uždavinio sąlyga

Šio uždavinio atsakymą galima rasti tik **logiškai analizuojant sąlygą ir skaičiuojant**. Žinoma, galima (su tam tikra tikimybe) atsakymą atspėti. Didelis atsakymo 504 „populiarumas“ (41,5 proc. mokinių) rodo kad nepakankamai įsigilinta į uždavinio sąlygą. Kita vertus, už teisingą atsakymą galima gauti tik vieną tašką, o laiko sugaišti reikia nemažai. Todėl galima manyti, kad daug mokinių net nesigilino į uždavinio sąlygą.

12. Mieste yra keturi knygynai. Tikimybė, kad mokinys galės bet kuriame knygyne nusipirkti jį dominančią knygą, lygi 0,5. Mokinys tol eina į knygynus, kol knygą nusiperka arba kol apeina visus knygynus. Į kiekvieną knygyną jis eina tik po vieną kartą. Atsitiktinis dydis X – mokinio aplankytų knygynų skaičius.

1. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį. *(3 taškai)*

2. Apskaičiuokite dydžio X matematinę viltį. *(1 taškas)*

58 pav. 12 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

<table>
<tr><th>Užd.</th><th>Sprendimas/atsakymas</th><th>Taškai</th><th>Vertinimas</th></tr>
<tr><td>12</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>P</td><td>1/2</td><td>1/4</td><td>1/8</td><td>1/8</td></tr>
</table>
$P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,
$P(X=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,
$P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.
</td><td>• 1

• 1

• 1</td><td>Už teisingai į lentelę surašytas X reikšmes.

Už teisingai apskaičiuotas reikšmes $P(X=1)$, $P(X=2)$ ir $P(X=3)$.

Už teisingai apskaičiuotą reikšmę $P(X=4)$.</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathrm{E}X=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}$. Ats.: $\mathrm{E}X=1\frac{7}{8}$.</td><td>• 1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
</table>

Pastabos. 1. Jeigu mokinys $P(X=4)$ apskaičiuoja pagal formulę $P(X=4)=1-(P(X=1)+P(X=2)+$ $+P(X=3))$ $=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$ arba $P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, tai vertinimas nesikeičia.

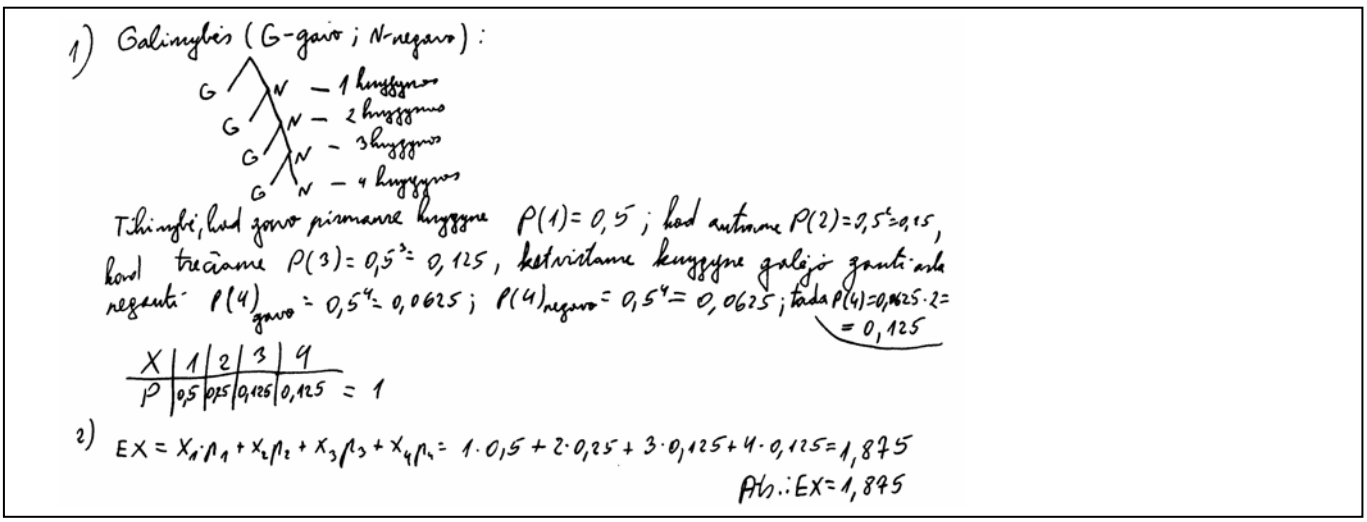
2. Jei mokinys suklydo skaičiuodamas $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, o $P(X=4)$ apskaičiuoja pagal formulę $1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$ ir gauna neigiamą arba didesnę už 1 tikimybę, tai taškas neskiriamas.

3. Jei lentelė užpildyta teisingai be tikimybių skaičiavimo, skiriami *2 taškai*.

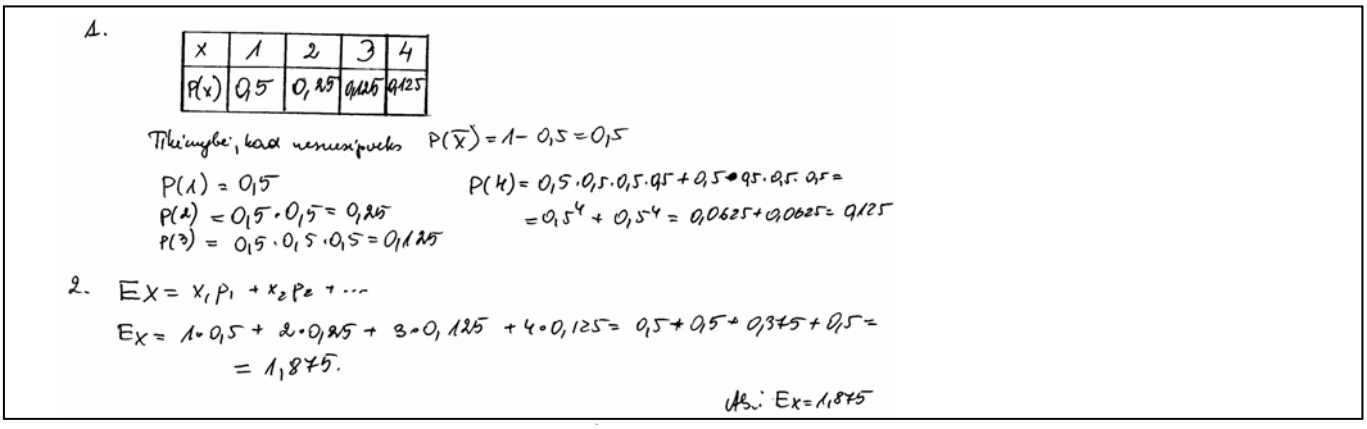
4. Jeigu skirstinyje bent viena tikimybė neigiama arba didesnė už vienetą, tai taškas už EX apskaičiavimą neskiriamas.

59 pav. 12 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (žr. 60, 61 ir 62 pav.).



60 pav. 12 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



61 pav. 12 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

X – mokinio aplankytų knygynų skaičius

1. Galimos X reikšmės yra 1; 2; 3; 4.

m	1	2	3	4
P(X=m)	0,5	0,25	0,125	0,125

P(rasti dominančią knygą) = 0,5 = P(A)

P(nerasti dominančios knygos) = 1 − P(A) = 0,5 = P(B)

Čia įsivardijau įvykių tikimybes.

$P(X=1) = P(A) = 0{,}5$

$P(X=2) = P(B)\cdot P(A) = 0{,}5^2 = 0{,}25$

$P(X=3) = P(B)\cdot P(B)\cdot P(A) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(X=4) = P(B)\cdot P(B)\cdot P(B)\cdot P(A) + P(B)\cdot P(B)\cdot P(B)\cdot P(B) =$

$= 0{,}5^4 + 0{,}5^4 = 0{,}0625 + 0{,}0625 = 0{,}125$

Patikrinimas: $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

$0{,}05 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125 = 1$

$1 = 1$

2. $EX = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + X_4P_4 = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}125 + 4\cdot 0{,}125 =$

$= 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}375 + 0{,}5 = 1{,}875$

Ats.:

m	1	2	3	4
P(X=m)	0,5	0,25	0,125	0,125

, $EX = 1{,}875$

62 pav. 12 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Egzamino statistika rodo, kad šis uždavinys buvo vienas iš sunkiausių. Daug mokinių jo visai nesprendė. Kita vertus, buvo ir tokių, kurie kitų uždavinių nesprendė, o šį bandė spręsti. Šis uždavinys nelabai atskyrė geriausiai ir blogiausiai užduotį atlikusius mokinius, nors ir koreliavo su visa užduotimi.

Pirmoji uždavinio dalis buvo sunkesnė už antrąją, ją teisingai išsprendė tik apie 7 proc. laikiusių egzaminą mokinių, šiek tiek daugiau nei pusė mokinių gavo po vieną tašką, t.y. teisingai į lentelę surašė *X* reikšmes ir taip paliko. Turint mintyje, kad kombinatorikos, tikimybių ir statistikos mokymas vis dar kelia sunkumų mokytojams (jie nepasitiki savo pasirengimu dėstyti), tokie mokinių rezultatai nestebina. Buvo nemažai mokinių, kurie skirstinio lentelę bandė pildyti be skaičiavimų, kiti rėmėsi galimybių medžiu (žr. 61 pvz.), taikė daugybos taisyklę (žr. 62 pvz.). Dauguma nemokėjo apskaičiuoti nė vienos tikimybės, geriausiu atveju teisingai nustatė tikimybę nusipirkti knygą pirmajame knygyne. Daug mokinių klydo skaičiuodami tikimybę įsigyti knygą ketvirtajame knygyne, nenumatė galimybės, kad gali ir nenusipirkti (žr. 63 pav.). Žinoma, šios klaidos buvo galima išvengti pasitikrinus, ar tikimybių suma lygi 1.

1.

X	1	2	3	4
P(X)	0,5	0,25	0,125	0,0625

$P(1) = 0{,}5$ $\quad P(2) = 0{,}5^2 = 0{,}25$ $\quad P(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$P(4) = 0{,}5^4 = 0{,}0625$

2. $EX = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + x_3\cdot p_3 + x_4\cdot p_4$

$EX = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}125 + 4\cdot 0{,}0625 = 1{,}625$

Ats. 1,625

63 pav. 12 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Antroji uždavinio dalis mokiniams buvo daug lengvesnė už pirmąją, ją teisingai atliko kas antras mokinys. Ir tai suprantama, nes turint skirstinį visai nesunku įrašyti reikšmes į matematinės vilties skaičiavimo formulę, kuri pateikta užduoties sąsiuvinyje.

IŠVADOS

Statistiniai rezultatai rodo, kad kas penktas mokinys neišlaikė valstybinio matematikos brandos egzamino, nors teigiamo įvertinimo apatinė riba tebuvo 9 taškai iš 50 galimų. Vis dėlto pagal šį rodiklį yra problemiška lyginti 2005 metų valstybinio brandos egzamino rezultatus su ankstesnių metų rezultatais, nes apatinė surinktų taškų suma būdavo mažesnė. Išsami uždavinių analizė rodo, kad šių metų egzamino užduotis buvo parengta laikantis Brandos egzaminų programos reikalavimų. Tam tikrų priekaištų galima padaryti tik dėl uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais – jų atsakymai turėtų būti randami be sprendimo. Šios sąlygos neatitinka 2, 4 ir 6 (tai trumpo sprendimo) uždaviniai.

Statistiniai uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais sprendimo rezultatai geri (išskyrus 2, 4 ir 8). Jie geresni už trumpo sprendimo uždavinių rezultatus, nors šie uždaviniai yra gana paprasti. Lyginamoji analizė kelia abejonių, ar verta uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais įtraukti į valstybinio egzamino užduotį. Juos derėtų keisti įvairiais trumpo sprendimo uždaviniais.

Analizuojant konkrečius valstybinio brandos egzamino darbus išryškėjo bazinių matematikos žinių ir gebėjimo atlikti standartines procedūras spragos. Aprašant uždavinių sprendimus neretai trūko teiginių argumentavimo, nuoseklių skaičiavimų, matematinės kultūros.

Šioje analizėje pateikti įvairių uždavinių sprendimo fragmentai turėtų padėti mokiniams geriau pasirengti valstybiniam matematikos brandos egzaminui.