LIETUVOS RESPUBLIKOS ŠVIETIMO IR MOKSLO MINISTERIJA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS

2006 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO REZULTATŲ

KOKYBINĖ ANALIZĖ

Antanas Apynis, Marytė Stričkienė

ĮVADAS

Rengiant matematikos 2006 metų valstybinio brandos egzamino rezultatų kokybinę analizę buvo siekiama:

- išanalizuoti mokinių egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatus;
- pademonstruoti įvairias galimas uždavinių sprendimo strategijas, pateikiant mokinių teisingo sprendimo pavyzdžius su komentarais, specialistų parengtas kai kurių uždavinių sprendimo vertinimo instrukcijas;
- aptarti mokinių darbuose pasitaikiusias būdingas klaidas;
- palyginti šių metų ir 2004 bei 2005 metų rezultatus;
- pateikti rekomendacijas mokytojams.

Egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatai aptariami priskiriant juos vienai ar kitai egzamino programos matricoje numatytai turinio sričiai:

- skaičiai, skaičiavimai, algebra;
- geometrija;
- funkcijos ir analizės pradmenys;
- kombinatorika, tikimybės ir statistika.

Nagrinėjant kiekvienos turinio srities uždavinius atkreiptas dėmesys ir į tai, kokius gebėjimus turėjo pademonstruoti mokiniai, spręsdami konkretų uždavinį.

Statistinė ar kitokia informacija apie atskiras turinio sritis nepateikiama, nes iš kelių vienos ar kitos srities uždavinių negalima daryti patikimų apibendrintų išvadų.

Atkreipiamas dėmesys į tai, kad didelė dalis uždavinių, kurie buvo vertinami daugiau nei vienu tašku, priskiriami kelioms turinio sritims (pavyzdžiui, geometrijai, funkcijoms, skaičiavimams), atsižvelgiant į tai, kurios turinio srities žinių ar įgūdžių reikalavo atitinkamas uždavinio sprendimo žingsnis.

Rengiant šią kokybinę analizę buvo remtasi 2006 m. matematikos valstybinio brandos egzamino užduoties rezultatų statistine analize, peržiūrėta daug darbų iš reprezentatyvios visų egzaminą laikiusių mokinių darbų imties.

Šių metų mokinių rezultatai buvo lyginami ir su 2004, ir su 2005 m. matematikos valstybinį brandos egzaminą laikiusiųjų rezultatais.

Kad būtų lengviau skaityti analizę, procentai pateikiami sveiko skaičiaus tikslumu.

Tikimės, kad ši analizė bus naudinga matematikos mokytojams, mokiniams bei valstybinio matematikos egzamino užduoties rengėjams.

I. SKAIČIAI, SKAIČIAVIMAI, ALGEBRA

Valstybinio egzamino užduotyje yra trys skaičiavimų ir algebros uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais (2, 3 ir 4), trys trumpo sprendimo (8,10,12) uždaviniai ir vienas probleminis matematinio tyrimo uždavinys (19). Žinoma, skaičiavimo gebėjimai ir algebros žinios tikrinamos ir kitais uždaviniais. Uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais ir trumpo sprendimo uždaviniai yra standartiniai – tokių gausu mokyklinėse mokymo priemonėse. Geometrinės progresijos uždaviniui (19) išspręsti nepakako standartinio mąstymo.

Kaip ir ankstesniais metais uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais sprendimo rezultatai buvo geresni negu kitų uždavinių sprendimo rezultatai.

Aptarkime konkrečius uždavinius.

2. Knygas dedant į krūveles po 3, lieka 2 knygos, taip pat 2 knygos lieka ir dedant jas į krūveles po 10. Knygų buvo:

A 12 **B** 8 **C** 32 **D** 16 **E** 24

1 pav. 2 uždavinio sąlyga

© Nacionalinis egzaminų centras, 2007

Tai lengviausias uždavinys, net 96 proc. mokinių jį išsprendė teisingai. Matyt, abiturientai jį sprendė sudarydami lygčių sistemas (egzamino darbuose yra tokių bandymų), o guvus pradinukas galėtų išspręsti pasitelkęs sveiką nuovoką, juo labiau, kad yra duoti atsakymai.

3. Kuri pora lygčių yra ekvivalenčios lygtys?

A $\frac{x^2-4}{x-2}=4$ ir $x+2=4$ **B** $x-1=3$ ir $(x-1)^2=9$

C $x=3$ ir $x+\frac{1}{x-3}=3+\frac{1}{x-3}$ **D** $x+1=1$ ir $x+1+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

E $\sqrt{x^2}=1$ ir $x=1$

2 pav. 3 uždavinio sąlyga

Mokyklinės matematikos kurse ekvivalentumo sąvokai skiriama nepakankamai dėmesio, todėl nestebina, kad tik kas trečias mokinys pasirinko teisingą atsakymą. Užduoties autoriai tinkamai parinko lygčių poras, numatytos galimos lygčių sprendimo klaidos, visi atsakymai atrodo galimi. Net daug taškų surinkę mokiniai klydo.

4. $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=$

A -1 **B** $5-2\sqrt{5}$ **C** $2\sqrt{5}-5$ **D** 1 **E** 5

3 pav. 4 uždavinio sąlyga

Gana lengvas uždavinys. Apie 65 proc. mokinių pasirinko teisingą atsakymą. Dažniausiai pasitaikiusios klaidos – *numeta* šaknį, nerašo modulio.

8. Priekinio dviračio rato apskritimo ilgis 120 cm, galinio rato – 122 cm. Kokį atstumą (metrais) nuvažiavus dviračiu, jo priekinis ratas apsisuks vienu apsisukimu daugiau negu galinis?

(2 taškai)

4 pav. 8 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
8		**2**	
	Pažymėkime x – atstumą, kurį turi nuvažiuoti dviratininkas, kad priekinis dviračio ratas apsisuktų 1 apsisukimu daugiau negu galinis. Pagal sąlygą $\frac{x}{1{,}2}-\frac{x}{1{,}22}=1$.	• 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą (įvesti reikalingi žymenys, sudaryta lygtis).
	Iš čia $0{,}02x=1{,}2\cdot 1{,}22 \Rightarrow x=73{,}2$ m. *Ats.:*.73,2 m.	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.
	Kitas sprendimo būdas Tarkime, x – priekinio rato apsisukimų skaičius. Sudarome lygtį $x\cdot 122-x\cdot 120=120$.	• 1	Už teisingą lygtį.
	Iš čia $x=60$. $60\cdot 122=73{,}2$ m	• 1	Už teisingą atsakymą.
	Trečias sprendimo būdas $122-120=2$, $\frac{120}{2}=60$ –nustatomas apsisukimų skaičius.	• 1	
	$60\cdot 122=73{,}2$ m.	• 1	Už teisingą atsakymą.

Pastaba. Jei randamas MBK(120, 122)=7320, skiriamas *1 taškas*.

5 pav. 8 uždavinio vertinimo instrukcija

Gana sunkus uždavinys, labai gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai jį atlikusius mokinius ir puikiai koreliavo su visa užduotimi. Beveik kas antro mokinio atsakymas įvertintas nuliu taškų, kas antro – vienu tašku ir tik apie 29 proc. mokinių išsprendė teisingai. Pateikiami trys skirtingi gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (6, 7, 8 pav.):

x - kiek kartų apsisuko ratas

$120x + 120 = 122x$

$-2x = -120 \mid : (-2)$

$x = 60$

$60 \cdot 122 = 7320$ (cm)

$7320 : 100 = 73{,}20$ (m)

Atsak.: 73,2 m

6 pav. 8 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

1) $C_1 = 120$ cm $= 1{,}2$ m

2) $C_2 = 1{,}22$ m

3) $C_2 - C_1 = 0{,}02$ (o gip skirtumas)

4) $\frac{C_2}{0{,}02} = 61$ kart.

5) $S = 61 \cdot 1{,}2$ m $= 73{,}2$ m

Atsak.: 73,2 m

7 pav. 8 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Kai dviratis nuvažiuos 122 cm, priekinis ir galinis dviračio ratas apsiuks 2 cm daugiau (122 cm − 120 cm = 2 cm).
Sudarome proporciją:

122 cm dviratis nuvažiuos — 2 cm priekinis ratas nuvažiuos daugiau

x cm —"— — 120 cm —"—

$x = \frac{122 \cdot 120}{2} = 7320$ cm $= 73{,}2$ m.

tiek cm reikia, kad apsiuktų priekinis ratas

Ats.: Dviračio priekinis ratas apsiuks vienu apsiukimu daugiau nei galinis, kai dviratis nuvažiuos 73,2 metro.

8 pav. 8 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Nuoseklaus skaičiavimo pavyzdys (9 pav.).

120	122
240	244
360	366
480	488
600	610
720	732
...	...
7200	7320

$60 \cdot 122 = 7320$ cm $= 73{,}2$ m.

$60 \cdot 120 = 7200$ cm

$7320 - 7200 = 120$ cm.

Ats.: 73,2 m

9 pav. 8 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Pavyzdys sprendimo, kai randamas mažiausias bendrasis kartotinis (žr. 10 pav.)

Ieškome mažiausio bendrojo kartotinio:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 122 & 2 \\ 61 & 61 \\ 1 & \end{array}$$

$MBK(120;122) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61 = 7320\,(cm) = 73\,m\ 20\,cm$

Atsk.: priekinis ratas apsiniks vienu apsinikimu daugiau negu galinis nuvažiavus 73 m 20 cm

10 pav. 8 uždavinio sprendimo 5 pavyzdys

10. Draudžiant būstą metams 80 000 Lt draudimo suma nuo stichinės nelaimės, reikia mokėti 64 Lt, o draudžiant ta pačia suma nuo vagystės – 160 Lt. Draudžiant būstą 80 000 Lt suma nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės kartu, taikoma 25 procentų nuolaida. Kiek procentų draudimo sumos reikia mokėti draudžiant nuo abiejų rizikų kartu?

(3 taškai)

11 pav. 10 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
10		**3**	
	$64 + 160 = 224$ Lt. $224 \cdot 0{,}75 = 168$ Lt,	• 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
	$\frac{168}{80\,000} \cdot 100\,\% = 0{,}21\,\%$.	• 1	Už teisingai apskaičiuotą sumą su 25 % nuolaida.
	Ats.: 0,21 %.	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba. Sprendimas, parašius proporciją

$$\begin{array}{c} 80\,000 \text{ Lt} - 75\,\% \\ \underline{224 \text{ Lt} - x\,\%} \\ x = 0{,}21\,\%, \end{array}$$

vertinama *1 tašku* (už teisingą strategiją, išskiriant 224 Lt).

12 pav. 10 uždavinio vertinimo instrukcija

Procentų uždavinius dauguma mokinių sprendė geriau negu ankstesnių laidų abiturientai; net ir tie kurie visą užduotį atliko prastai, šį uždavinį sprendė gerai. Dažnai pasitaiko nekorektiškai užrašytų procentų uždavinių sprendimų (pakartoja algoritmą, kurį atlieka su skaičiuokliu).

Gerai išspręsto uždavinio pavyzdį pateikiame 13 pav.

Draudžiant nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės 64 Lt + 160 Lt, draudimo suma 80 000 Lt, 25% nuolaidą pritaikius reikės mokėti (64 + 160) · 0,75 = 168 Lt. Tai sudarys viso draudimo sumos $\frac{168}{80000} \cdot 100\% = 0{,}21\%$

Atsk.: Nuo abiejų rizikų draudžiant kartu reikės mokėti 0,21 % draudimo sumos.

13 pav. 10 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Gerai išsprendus ir gavus teisingą atsakymą, dar kartą kažkodėl dauginama iš šimto ir atseit gaunami procentai, taip prarandamas taškas. Pateikiame tokio sprendimo pavyzdį (žr. 14 pav.).

Draudžiant nuo abiejų rizikų kartu, reikėtų mokėti 64 + 160 = 224 Lt, bet kadangi taikoma nuolaida, tai mokėti reikia:

224 – 100%
x – 75%

x = 168 Lt

80000 Lt – 100%
168 Lt – x%

$x = \frac{168 \cdot 100}{80000} = 0,21$

Atš.: Reikia mokėti 21% draudimo sumos.

14 pav. 10 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Būdinga klaida – sudedama 80000 ir 80000 ir nuo šios sumos skaičiuojami procentai. Pavyzdžiui 15 pav.

m_b – bendras mokestis

$m_b = 64 + 160 = 224$ Lt

$m_{b.n.}$ – b. mok. su nuolaida

$m_{b.n} = 224 \cdot \frac{75}{100} = 168$ Lt

draud.

S – visa suma

$S = 80000 + 80000 = 160000$ Lt

160000 Lt – 100%
168 Lt – x%

$x = \frac{168 \cdot 100\%}{160000} = 0,105\%$

Atš.: 0,105% sumos

15 pav. 10 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

12. Išspręskite nelygybę

$$\frac{x^2 + x - 6}{4 - x} \le 0.$$

(3 taškai)

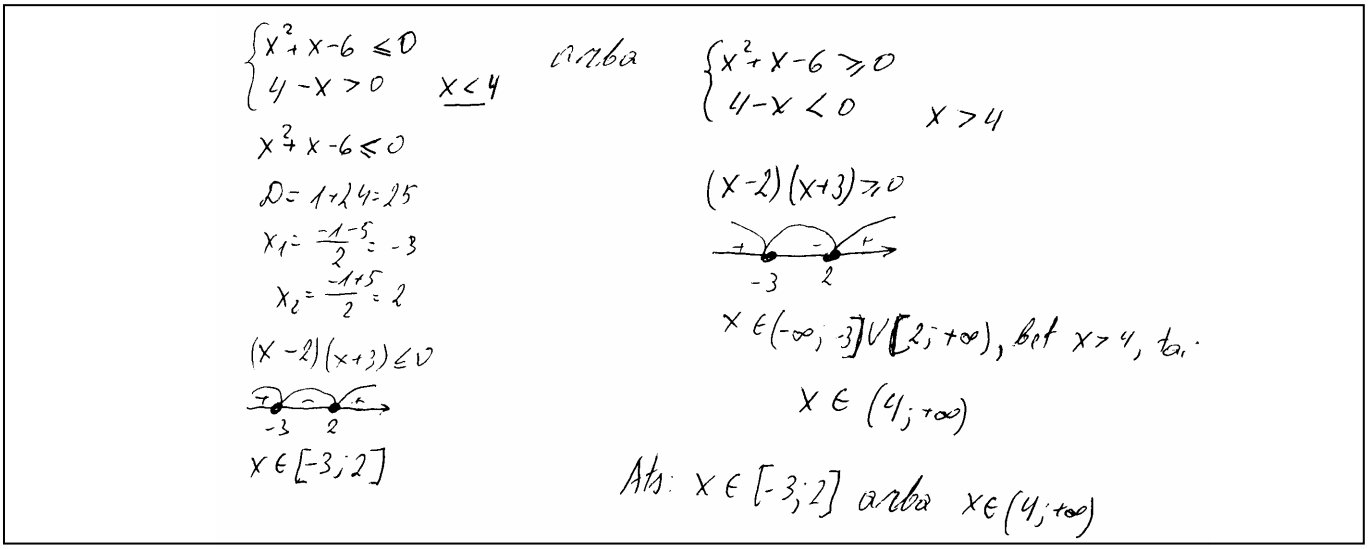
16 pav. 12 uždavinio sąlyga

Tai vadovėlinė (standartinė) racionalioji nelygybė, kuria tikrinamas mokinio gebėjimas:

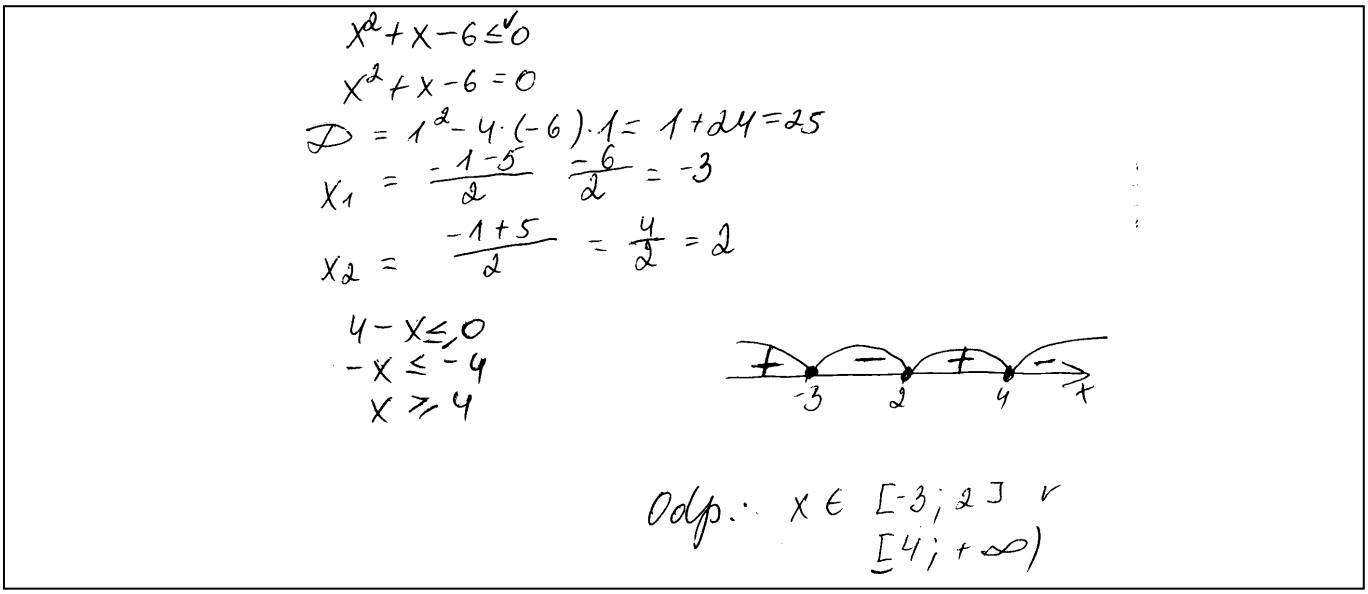
- atsižvelgti į reiškinio apibrėžimo sritį rašant atsakymą $(x \neq 4)$;
- išskaidyti kvadratinį trinarį;
- nustatyti racionaliosios funkcijos reikšmės ženklą neskaičiuojant pačios reikšmės.

Uždavinys nesunkus, nes visiškai pakanka pagrindinės mokyklos programos žinių. Tai liudija ir statistiniai vertinimo duomenys (*0 taškų* gavo 9,51 proc., o visus *3 taškus* 54,34 proc. kandidatų). Yra labai gerų darbų (žr. 17 pav.), nors pasitaiko ir gana paviršutiniškų. Štai 18 paveiksle pateiktame sprendime matome atvejį, kai nesigilinama į uždavinio sąlygą, o sprendimas ir atsakymas rašomas pagal išmoktą (matyt, nevisai suprastą) schemą.

Šio uždavinio yra skiriamoji geba yra gera (53,88).



17 pav. 12 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



18 pav. 12 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

19. Ar skaičiai 1, 7 ir 18 gali būti kurios nors didėjančios geometrinės progresijos nariai (nebūtinai gretimi). Atsakymą pagrįskite.

(4 taškai)

19 pav. 19 uždavinio sąlyga

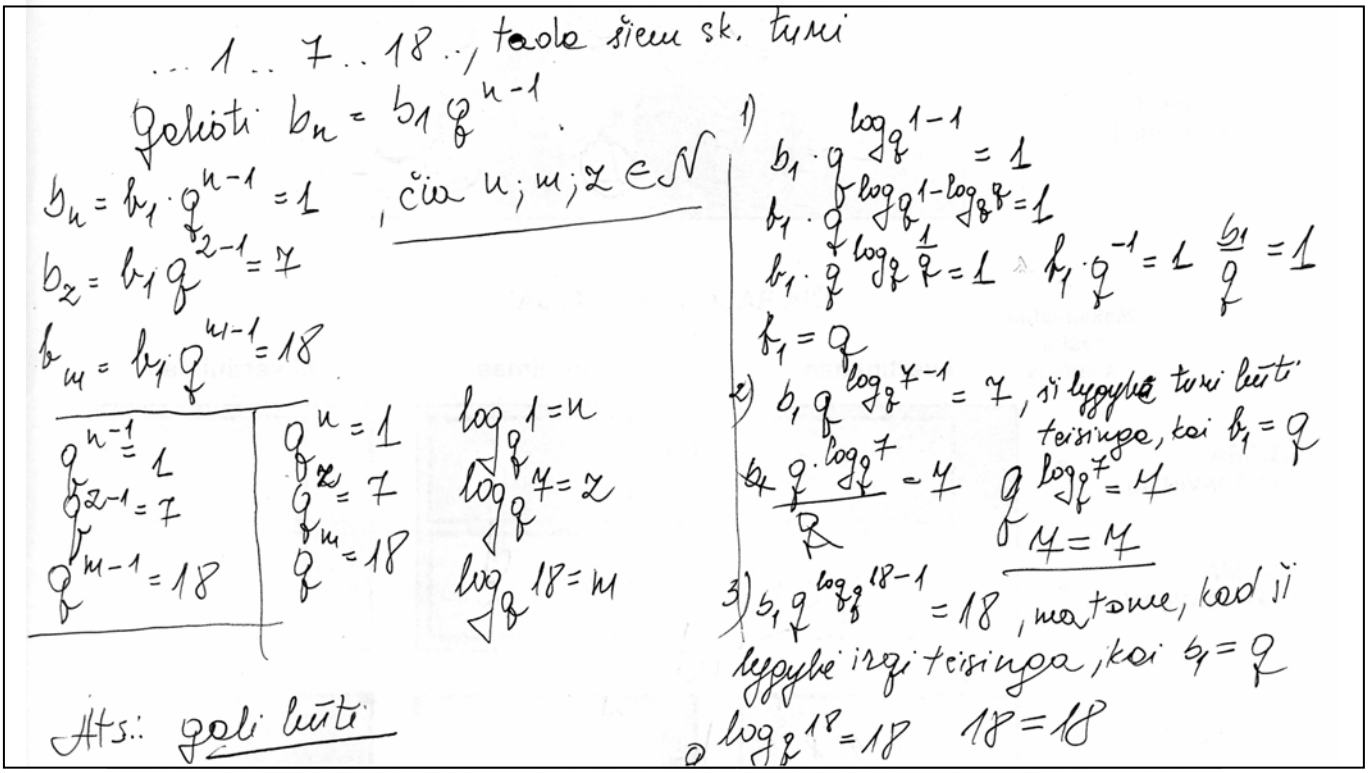
Tai probleminis matematinio tyrimo uždavinys, reikalaujantis gana gilaus matematinio mąstymo. Teoriniu požiūriu jis yra visiškai programinis, nes jam išspręsti pakanka žinoti geometrinės progresijos apibrėžimą ir bendrojo nario formulę. Sunkiau yra pasirinkti analizės strategiją. Sprendimai buvo vertinami pagal tokią instrukciją (20 pav.).

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		**4**	
	NEGALI. Jei šie skaičiai būtų kokios nors geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9, \dots$ nariais (pvz., $a_m = 1$, $a_n = 7$, $a_p = 18$, $m < n < p$), tada galima būtų užrašyti $\begin{cases} 7 = 1 \cdot q^{n-m}, \\ 18 = 1 \cdot q^{p-m} \end{cases}$ (1) arba $\begin{cases} 7^{p-m} = q^{(p-m)(n-m)}, \\ 18^{n-m} = q^{(p-m)(n-m)}. \end{cases}$ Iš čia gautume, kad $7^{p-m} = 18^{n-m}$. (2) Pastaroji lygybė nėra galima, kadangi, kai $m < n < p$, dešiniosios lygybės laipsnio pagrindas yra lyginis skaičius, o kairės pusės – nelyginis.	• 1 • 1 • 1 • 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą (nagrinėjami ne greta stovintys geometrinės progresijos nariai). Už narių išraiškas naudojant geometrinės progresijos vardiklį (sudaryta (1) sistema). Už gautą (2) lygybę arba jai ekvivalenčią išraišką. Už teisingą argumentavimą.

Pastaba. Kai nagrinėjami tik gretimi nariai ir įrodoma nelygybė $\frac{7}{1} \neq \frac{18}{7}$, iš viso skiriamas *1 taškas* (atskiras pirmojo sprendimo atvejis).

20 pav. 19 uždavinio vertinimo instrukcija

Tarp analizuotų darbų nepavyko rasti nė vieno teisingo šio uždavinio sprendimo. Būta visai neblogų bandymų (žr. 21 pav. ir 22 pav.), rodančių aiškų problemos suvokimą, tačiau nepakankama matematinio tyrimo patirtis, matyt, neleido šiems mokiniams gauti teisingų išvadų.



21 pav. 19 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

$$\begin{cases} 7 = 1\cdot q^{(n_1-1)} \\ 18 = 1\cdot q^{(n_2-1)} \\ 18 = 7\cdot q^{(n_2-n_1)} \end{cases} \qquad n_1, n_2 \in N, \quad n_2 > n_1$$

$$\begin{cases} n_1 - 1 = \log_q 7 \rightarrow n_1 = \log_q 7 + 1 \\ n_2 - 1 = \log_q 18 \rightarrow n_2 = \log_q 18 + 1 \\ n_2 - n_1 = \log_q \frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\log_q 18 - \log_q 7 = \log_q \frac{18}{7}$$

$$\log_q \frac{18}{7} = \log_q \frac{18}{7}$$

Ats.: gali

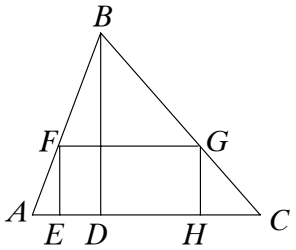
22 pav. 19 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Statistiniai egzamino duomenys rodo, kad šis uždavinys buvo ne tik labai sunkus (81,25 proc. gavo nulinius įvertinimus), bet ir prastos skiriamosios gebos aspektu (skiriamoji geba tik 15,4).

II. GEOMETRIJA

Geometrijos sričiaipriklauso du planimetrijos uždaviniai (15 ir 18) ir vienas stereometrijos uždavinys (16). Geometrijos žinios iš dalies yra reikalingos sprendžiant 8 uždavinį.

15. Į trikampį *ABC*, kurio pagrindo kraštinės *AC* ilgis 10 cm, o aukštinės *BD* ilgis 8 cm, įbrėžtas stačiakampis *EFGH* (žr. pav.). Šio stačiakampio dvi viršūnės yra trikampio pagrindo kraštinėje, o kitos dvi – kitose trikampio kraštinėse.



1. Sakykime, *EF* ilgis *x* cm. Įrodykite, kad stačiakampio *EFGH* plotas yra $S = \frac{5}{4}(8x - x^2)$.

(2 taškai)

2. Kokio didžiausio ploto stačiakampį galima įbrėžti į trikampį *ABC*?

(3 taškai)

23 pav. 15 uždavinio sąlyga

Tai sudėtinis planimetrijos uždavinys. Šis uždavinys yra vidutinio sunkumo, nors statistiniai egzamino duomenys rodo jį buvus sunkų (net 76,75 proc. kandidatų gavo nulinius įvertinimus). Toks rezultatas greičiau liudija nepakankamą vidurinės mokyklos dėmesį geometrijai negu uždavinio nepriimtinumą. Uždavinys yra labai tinkamas egzaminui, nes:

- aiškiai ir suprantamai suformuluotas;
- abi jo dalys yra matematiškai turiningos;
- yra probleminis (antroje dalyje reikia atlikti tyrimą);
- matematiniai skaičiavimai yra lengvi.

Nagrinėjant konkrečius kandidatų darbus pastebėta, kad pirmoji (ploto formulės įrodymo) dalis daug kur visai praleidžiama, o sprendžiama tik antroji (ekstremumo skaičiavimo) dalis. Ieškant didžiausio ploto paprastai taikoma Ferma teorema (žr. 24 pav.), nors visiškai nesunku be jos apsieiti, nes

$$S=\frac{5}{4}(8x-x^2)=\frac{5}{4}(16-(x^2-8x+16))=\frac{5}{4}(16-(x-4)^2)\le\frac{5}{4}\cdot 16=20$$

su visais realiaisiais skaičiais x.

1. $\triangle FBG \sim \triangle BAC$

$\frac{BO}{BD}=\frac{FG}{AC}$

$BO = BD - OD = 8-x$ (nes $FE = OD = x$)

$\frac{8-x}{8}=\frac{FG}{10}$

$8FG = 10\cdot(8-x)$

$8FG = 80-10x$

$8FG = 2(40-5x)\ |:2$

$4FG = 40-5x$

$FG = \frac{40-5x}{4}$

$S_{EFGH} = FE\cdot FG = x\cdot\frac{40-5x}{4} = \frac{x(40-5x)}{4} =$

$= \frac{5x(8-x)}{4} = \frac{5(8x-x^2)}{4} = \frac{5}{4}\cdot(8x-x^2)$

2. $S'(x) = \left(\frac{5}{4}\cdot(8x-x^2)\right)' = \frac{5}{4}\cdot(8x-x^2)+\frac{5}{4}\cdot(8-2x) =$

$= \frac{5}{4}\cdot(8-2x) = \frac{5}{4}\cdot 8 - \frac{5}{4}\cdot 2x = 10-\frac{10x}{4} = \frac{40-10x}{4} =$

$= \frac{2(20-5x)}{4} = \frac{20-5x}{2}$.

...

$\frac{20-5x}{2}=0$

$20-5x=0$

$-5x=-20$

$x=4$ (radau kritinį tašką)

$+$ $-$

$\nearrow$ 4 $\searrow$ x

max

Didžiausia reikšmė yra $x=4$.

Vadinasi,

$S(4)=\frac{5}{4}\cdot(8\cdot 4-4^2)=\frac{5}{4}\cdot(32-16)=$

$=\frac{5}{4}\cdot 16 = 20$ (ploto vienetų)

Į trikampį ABC galima įbrėžti 20 (pl.o.) didžiausią stačiakampį.

Atš.: 1. įrodyta.
2. 20.

24 pav. 15 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Tokie sprendimai rodo, kad vidurinėje mokykloje kvadratinio trinario savybių taikymui skiriama nepakankamai dėmesio. Vis dėlto pavyko aptikti vieną darbą (žr. 25 pav.), kuriame ieškant didžiausio ploto remiamasi kvadratinės funkcijos grafiku.

1. 1) $\triangle BFG \sim \triangle ABC$, nes $\angle B$ - bendras, o $FG \parallel AC$, todėl $\angle F = \angle A$ (pagal du kampus)

2) todėl $\frac{BO}{BD}=\frac{FG}{AC}$

$\frac{8-x}{8}=\frac{FG}{10}$

$FG = 10-\frac{5}{4}x$

3) $S = FE\cdot FG = x\cdot(10-\frac{5}{4}x) = 10x-\frac{5}{4}x^2 = \frac{5}{4}(8x-x^2)$

2. $S(x) = 10x-\frac{5}{4}x^2$

Kadangi funkcijos $S(x)$ grafikas yra parabolė su šakomis, nukreiptomis žemyn, todėl didžiausią reikšmę įgis viršūnės koordinatėse:

$\bar{x} = \frac{-10}{-2\cdot\frac{5}{4}} = -\frac{10}{2,5} = 4$

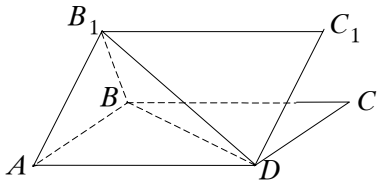
$S(4) = 10\cdot 4-\frac{5}{4}\cdot(4)^2 = 40-20 = 20$

Atš.: $S_{EFGH} = 20$ kv. vnt.

25 pav. 15 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

16. Du lygūs kvadratai $ABCD$ ir AB_1C_1D turi bendrą kraštinę AD, o jų plokštumos sudaro 60° didumo dvisienį kampą. Iš bendros viršūnės D kiekviename kvadrate nubrėžtos įstrižainės DB ir DB_1 (žr. pav.). Raskite kampo tarp šių įstrižainių kosinusą.

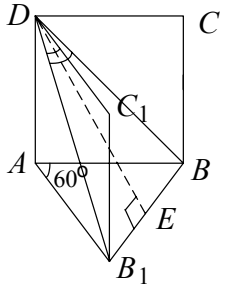
(4 taškai)



26 pav. 16 uždavinio sąlyga

Šis uždavinys yra gana paprastas stereometrijos uždavinys. Juo tikrinama, kaip mokinys supranta dvisienį kampą ir kaip geba taikyti kosinusų teoremą. Matematiniai skaičiavimai nesudėtingi. Tačiau iš statistinių duomenų matyti, kad kandidatams šis uždavinys buvo labai sunkus (net 62,63 proc. įvertinimų – *0 taškų*, o visus *4 taškus* gavo tik 15,71 proc. kandidatų).

Atkreipkime dėmesį į tai, kad reikiamam kampo BDB_1 kosinusui apskaičiuoti net galima apsieiti be kosinusų teoremos (taikant dvigubo argumento formulę $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$). Uždavinys pasidarytų suprantamesnis pasukus brėžinį iki tokios padėties, kuri parodyta 27 paveiksle. Tačiau tokių sprendimų nepavyko rasti.



27 pav.

Galima tik spėti (nes tušti puslapiai nieko nerodo), kad daliai mokinių nepavyko pakankamai įsigilinti į uždavinio sąlygą ir pasirinkti jo sprendimo strategiją.

Iš analizuotų sprendimų matyti, kad net geriems mokiniams (gavusiems aukštus matematikos egzamino įvertinimus) sunku buvo įžvelgti, kad ΔABB_1 yra lygiakraštis. Tai liudija 28 paveiksle pateiktas sprendimas.

1) $AD = B_1C_1 = a$

$DB_1 = DB$; $DB = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ (pagal Pitagoro teor.)

2) $\angle B_1AB = 60°$

$B_1B^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 60° =$ pagal kosinusų teor.

$= 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{2} = a^2$

$B_1B = \sqrt{a^2} = a$

3) ΔB_1BD; $B_1B^2 = BD^2 + B_1D^2 - 2BD \cdot B_1D \cdot \cos\angle BDB_1$

$a^2 = 2(a\sqrt{2})^2 - 2(a\sqrt{2})^2 \cdot \cos\angle BDB_1$

$a^2 = 4a^2 - 4a^2 \cdot \cos\angle BDB_1$

$4a^2 \cdot \cos\angle BDB_1 = 3a^2$

$\cos\angle BDB_1 = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$

Atsak.: $\cos\angle BDB_1 = \frac{3}{4}$

28 pav. 16 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Trikampio ABB_1 kraštinei BB_1 rasti mokinys taiko kosinusų teoremą. Apskritai šio mokinio sprendimas yra nuoseklus ir teisingas. Panašių darbų yra ir daugiau (žr. 29 pav.).

Rasti: $\cos\angle BDB_1$

Tegul $AB = AD = AB_1 = AB = x$, $x > 0$

$BB_1^2 = AB_1^2 + AB^2 - 2AB_1 \cdot AB \cdot \cos\angle B_1AB = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cos 60° = 2x^2 - x^2 = x^2$

$BB_1 = \sqrt{x^2} = x$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ $\quad BD = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

$BD = B_1D = x\sqrt{2}$, nes $AB_1C_1D = ABCD$ – kvadratai

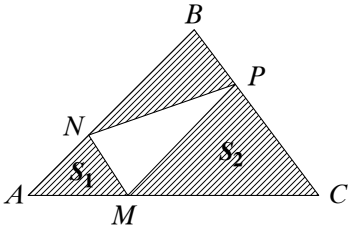
$BB_1^2 = BD^2 + B_1D^2 - 2BD \cdot B_1D \cos\angle BDB_1$

$\cos\angle BDB_1 = \frac{BD^2 + B_1D^2 - BB_1^2}{2BD \cdot B_1D} = \frac{2x^2 + 2x^2 - x^2}{2x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2}} = \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$

Atsak.: $\frac{3}{4}$

29 pav. 16 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

18. Per trikampio *ABC* kraštinės *AC* tašką *M* išvesta atkarpa *MN*, lygiagreti su *BC*, ir atkarpa *MP*, lygiagreti su *AB*. Taškai *N* ir *P* sujungti atkarpa *NP* (žr. pav.).



1. Trikampiai *MPC* ir *ABC* yra panašūs. Jų panašumo koeficientas k. Įrodykite, kad $\frac{S_{ABC}}{S_{MPC}} = k^2$.

(2 taškai)

2. Trikampių *ANM* ir *MPC* plotai yra S_1 ir S_2.

a) Įrodykite, kad trikampio *ABC* plotas *S* gali būti išreikštas plotais S_1 ir S_2 šitaip: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

(2 taškai)

b) Apskaičiuokite trikampio *NBP* plotą, kai $S_1 = 4$ cm^2, $S_2 = 9$ cm^2.

(2 taškai)

30 pav. 18 uždavinio sąlyga

Tai sudėtinis planimetrijos uždavinys su matematinio tyrimo elementais. Šio uždavinio sprendimo teorinis pagrindas yra trikampių panašumas. Trikampių panašumas nagrinėjamas pagrindinės mokyklos matematikos programoje, o juo remiamasi sprendžiant įvairius planimetrijos uždavinius. Tačiau reikalavimas įrodyti ploto formulę $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$, matyt, šokiravo beveik visus valstybinį egzaminą laikiusius mokinius (po *2 taškus* gavo vos 0,5 proc. jų). Tarp analizuotų darbų išsamaus įrodymo nepavyko rasti. Štai 30 paveiksle pateiktame sprendime be jokio pagrindimo parašyta, kad trikampio *NBP* plotas lygus $\sqrt{S_1 S_2}$ (tai, beje, teisingas teiginys). Kitos dvi uždavinio dalys sprendžiamos panašiai kaip cituotame darbe (žr. 31 pav.).

1. $\triangle MPC \sim \triangle ABC$. $\frac{AB}{MP} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{MC} = k$

$AB = k \cdot MP$, $AC = k \cdot MC$. Panašių trikampių atitinkamos aukštinės proporcingos: $\frac{BE}{PF} = k$, $BE = k \cdot PF$ ~~Brėžiame BE⊥AC ir PF⊥MC~~

$\frac{S_{ABC}}{S_{MPC}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BE}{\frac{1}{2} \cdot PF \cdot MC} = \frac{k \cdot MC \cdot k \cdot PF}{PF \cdot MC} = k \cdot k = k^2$.

2. b. $S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = (\sqrt{4} + \sqrt{9})^2 = 25$ (cm^2) MNBP - lygiagretainis (MN∥PB; MB∥MP)

$S_{NBP} = \frac{S_{ABC} - S_1 - S_2}{2} = \frac{25 - 4 - 9}{2} = 6$ (cm^2) Atsakymas: 6 cm^2

2. a. $S_{ABC} = S_1 + S_2 + MNBP = S_1 + S_2 + 2 \cdot NBP$ MNBP - lygiagretainis (MN∥PB; MB∥MP)

$\sqrt{NBP} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$ NBP = NPM

$S_{ABC} = S_1 + S_2 + 2 \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left((\sqrt{S_1})^2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} + (\sqrt{S_2})^2\right) = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

31 pav. 18 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Daugelyje egzamino darbų visai neįrodinėjama – apsiribojama trikampio *NBP* ploto skaičiavimu (žr. 32 pav.). Galbūt daugiau mokinių būtų gavę trikampio *ABC* ploto *S* reikšmę $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$, jeigu būtų reikalauta apskaičiuoti plotą *S*, kai žinomi plotai S_1 ir S_2; juk „standartiniuose“ geometrijos uždaviniuose paprastai reikia ką nors apskaičiuoti, o ne įrodyti.

2) b) $\triangle NBP = \triangle MNP$

$\triangle NBP = \frac{\triangle ABC - (S_1 + S_2)}{2} =$

$= \frac{25 - 13}{2} = 6$ cm^2

a) $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = (\sqrt{4} + \sqrt{9})^2 =$

$= (2 + 3)^2 = 25$ cm^2

32 pav. 18 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

III. FUNKCIJOS IR ANALIZĖS PRADMENYS

Tai tradicinė matematikos mokymo sritis. Mokytojai turi pakankamai mokymo patirties, o mokymo priemonėse daug įvairiausių uždavinių. 2006 metų matematikos valstybinio egzamino užduotyje funkcijų ir analizės pradmenų yra 1, 5, 6, 7, 9, 13, 15 ir 17 uždaviniuose. Tai įprastų formuluočių, gana lengvi, lyginant su tais, kuriuos tekdavo spręsti pamokų metu, uždaviniai. Iš dalies geometrijos, iš dalies funkcijų srities yra 15 uždavinys. Nors šis uždavinys ir probleminis, tačiau jo sprendimo strategijos yra daug kartų nagrinėtos. Panašios situacijos nagrinėtos vadovėliuose, analogiškų uždavinių buvo ankstesnių metų valstybinių egzaminų užduotyse. Matyt, todėl beveik visi laikiusieji egzaminą bandė šiuos uždavinius spręsti. Deja, rezultatai nėra džiuginantys. Dauguma uždavinių buvo tikrinamas supratimas, o ne sudėtingų algoritmų taikymas, kuriam kol kas daugiausia laiko skiriama baigiamųjų klasių matematikos pamokose.

1. Kuriam intervalui priklauso skaičius $\log_3 10$?

A (–3; –2) **B** (0; 1) **C** (1; 2) **D** (3; 4) **E** (2; 3)

33 pav. 1 uždavinio sąlyga

Mokiniams šis uždavinys nebuvo sunkus, jo neišsprendė tik trečdalis, matyt, ta dalis mokinių, kurie nemokėjo logaritmo apibrėžimo. Tema nagrinėta baigiamosiose klasėse, todėl dar nepamiršta. Uždavinys gana gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai egzaminą laikiusius mokinius.

5. Kurios parabolės viršūnė yra II ketvirtyje?

A $y=(x-1)^2-1$ **B** $y=(x+2)^2+1$ **C** $y=(x+2)^2-3$
D $y=(x-4)^2$ **E** $y=x^2-1$

34 pav. 5 uždavinio sąlyga

Šis uždavinys mokiniams buvo gana lengvas. Apie 70 proc. laikiusiųjų pasirinko teisingą atsakymą, vadinasi, jie gebėjo matydami funkcijos išraišką formule, įsivaizduoti grafiką (neatmetama ir spėjimo galimybė). Parabolės grafikus mokomasi braižyti devintoje klasėje.

6. Kiek sprendinių intervale $\left[-\frac{5\pi}{2};\ 2\pi\right]$ turi lygtis $\cos x=\frac{1}{2}$?

A 3 **B** 4 **C** 7 **D** 5 **E** 6

35 pav. 6 uždavinio sąlyga

Atrodytų gana paprastas pasirenkamojo atsakymo uždavinys mokiniams buvo sunkus, teisingą atsakymą pasirinko tik apie 42 proc. mokinių. Paprasčiausia sprendžiant šį uždavinį buvo nusibraižyti funkcijos y = cos *x* grafiką ir juo remiantis atsakyti į klausimą. Žinoma, buvo galima spręsti ir algebriniu būdu (geresniems rezultatams galėjo turėti įtakos ir tai, kad mokiniai tikėjosi užduoties sąsiuvinyje rasti trigonometrinių lygčių sprendimo formules). Kasmet trigonometrijos uždavinius mokiniai sprendžia vis prasčiau.

7. Palyginkite $\log_{\frac{1}{a}} a$ ir $\log_a \frac{1}{a}$, kai $a>1$.

(2 taškai)

36 pav. 7 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija (žr. 37 pav.).

Užd.	Sprendimas/atsakymas	Taškai	Vertinimas
7		2	
	$\log_{\frac{1}{a}} a = \dfrac{\log_a a}{\log_a \frac{1}{a}} = \dfrac{1}{-1} = -1$, $\log_a \dfrac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1$. Vadinasi, $\log_{\frac{1}{a}} a = \log_a \dfrac{1}{a}$.	• 1 • 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą. Už gautą teisingą atsakymą.

Pastabos. 1. Už teisingai pakeistą logaritmo pagrindą – *1 taškas*.
2. Už įrodymą su pasirinkta *a* reikšme skiriamas *1 taškas*.

37 pav. 7 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręsto uždavinio pavyzdys (žr. 38 pav.).

1) $\log_{\frac{1}{a}} a = \log_{a^{-1}} a = -1$

2) $\log_a \frac{1}{a} = \log_a a^{-1} = -1 \log_a a = -1$

3) $\log_a \frac{1}{a} = \log_{\frac{1}{a}} a$

att.: $\log_{\frac{1}{a}} a = \log_a \frac{1}{a}$

38 pav. 7 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Tai gana lengvas uždavinys, kuris labai gerai atskyrė geriausiai ir blogiausiai jį sprendusius mokinius ir puikiai koreliavo su visa užduotimi. Apie 55 proc. mokinių gerai išsprendė šį uždavinį, o apie 23 proc. gavo *0 taškų*. Kas penktas mokinys prarado po vieną tašką, nes įrodė su pasirinkta *a* reikšme. Tokio sprendimo pavyzdys 39.

$a = 2$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_2 \frac{1}{2}$

$-1 = -1$

Att.: $\log_{\frac{1}{a}} a = \log_a \frac{1}{a}$

39 pav. 7 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Įdomu tai, kad kai kurie mokiniai šį uždavinį sprendė gerai, nors kitus uždavinius sprendė prastai. Būdingos klaidos – nemoka logoritmo savybių. Tokių uždavinių gana dažnai pasitaiko valstybinių ir mokyklinių egzaminų užduotyse, jų nestinga ir įvairiose mokymo priemonėse. Atkreipkime dėmesį į tai, kad logaritminę lygtį prieš metus Lietuvos mokiniai sprendė gerokai prasčiau.

9. Su kuriomis a $(a \neq 0)$ reikšmėmis funkcijų $y = ax^2 + 6x + 3$ ir $y = 2x - a$ grafikai neturi bendrų taškų? *(3 taškai)*

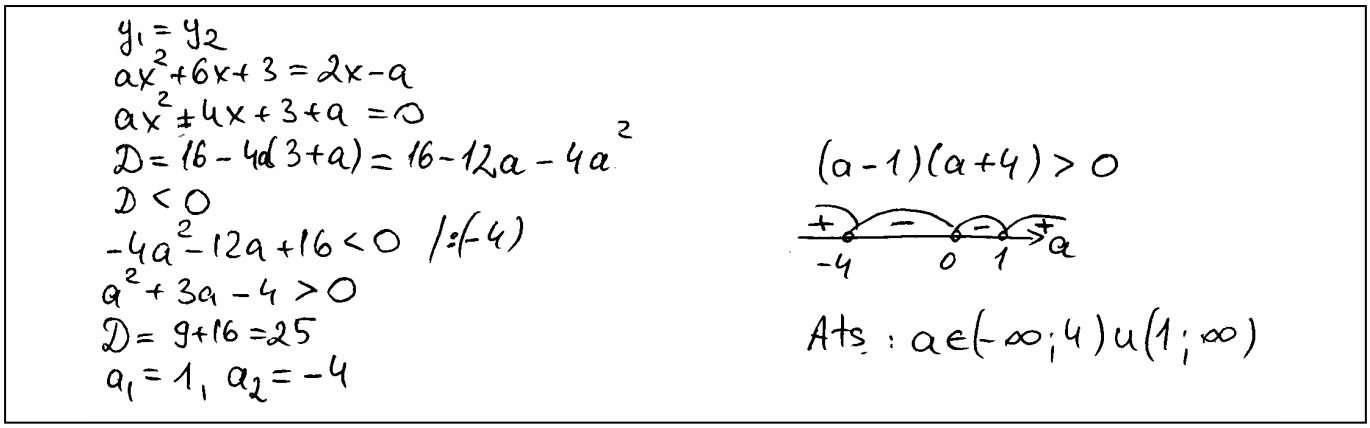
40 pav. 9 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

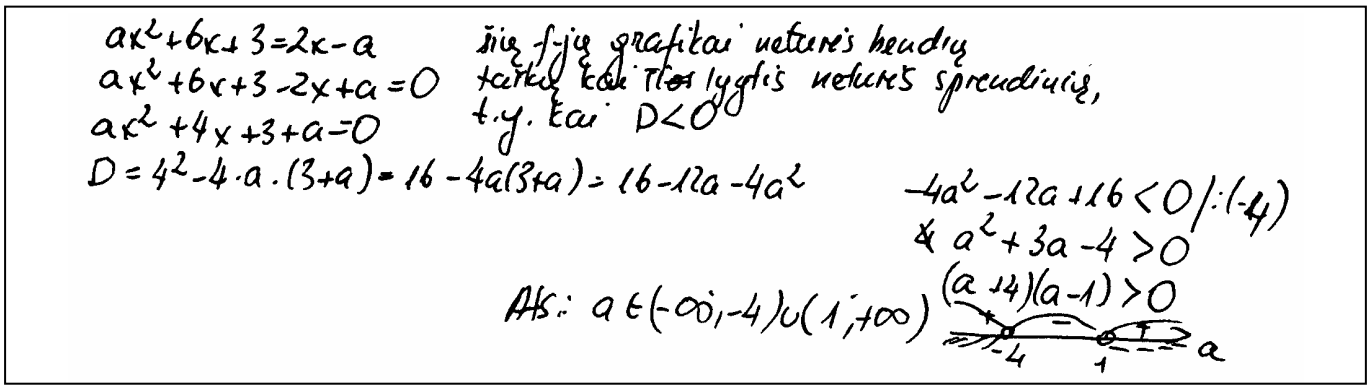
9		3	
	Šių funkcijų grafikai neturės bendrų taškų tik tuomet, kai lygčių sistema $\begin{cases} y = ax^2 + 6x + 3, \\ y = 2x - a \end{cases}$ neturės sprendinių.	• 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą (sudaroma lygčių sistema).
	Ši sistema ekvivalenti sistemai $\begin{cases} ax^2 + 4x + 3 + a = 0, \\ y = 2x - a, \end{cases}$ kuri neturi sprendinių, kai galioja nelygybė:	• 1	Už teisingai užrašytą grafikų nesikirtimo sąlygą (D<0).
	$4 - a(3 + a) < 0 \Leftrightarrow -a^2 - 3a + 4 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. *Ats.:* $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$..	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.

41 pav. 9 uždavinio vertinimo instrukcija

Gerai išspręstų uždavinių pavyzdžiai pateikti 42 ir 43 pav. Vis dėlto 42 pav. pateikto sprendimo atsakymas užrašytas nekorektiškai.



42 pav. 9 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



43 pav. 9 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Uždavinys yra tradicinis, analogiškų uždavinių daug yra vadovėliuose ir kitose mokymo priemonėse. Tai tikrai standartinio sprendimo uždavinys. Kvadratinių funkcijų tema nagrinėjama ne tik pagrindinės mokyklos matematikos kurse, bet ir vidurinėje mokykloje, todėl neturėtų būti pamiršta. Egzamino užduotyje antrą kartą tikrinama kvadratinė funkcija ir, matyt, tie patys mokiniai, kurie neišsprendė penkto uždavinio su pasirenkamuoju atsakymu, dar kartą gavo po *0 taškų*. Abiturientams šis uždavinys buvo sunkus. Tik apie 15 proc. mokinių jį išsprendė teisingai, net 38 proc. gavo *0 taškų*, tiek pat mokinių gavo po *1 tašką* (tik sudarė lygtį), bet visiškai išspręsti

nemokėjo. Puikiai atsiskyrė geriausiai atlikę visą užduotį mokiniai nuo prasčiausiai sprendusiųjų. Matyti, kad mokiniai nemoka spręsti kvadratinių nelygybių. Pavyzdžiai pateikti 44 ir 45 pav.

Kai $D < 0$,

$2x - a = ax^2 + 6x + 3$

$ax^2 + a + 6x - 2x + 3 = 0$

$ax^2 + a + 4x + 3 = 0$

$ax^2 + 4x + a + 3 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot a(a+3) = 16 - 4a^2 - 12a$

$4a^2 + 12a - 16 > 0$

$a^2 + 3a - 4 = 0$

$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$

$a_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$a_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

Atsk. $1; -4$

44 pav. 9 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

$ax^2 + 6x + 3 = 2x - a$

$ax^2 + 6x + 3 - 2x + a = 0$

$ax^2 + 4x + 3 + a = 0$

$D = 16 - 4a(3+a)$

$-4a^2 - 12a + 16 = 0$

$a^2 + 3a - 4 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$a_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$a_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

$a^2 + 3a - 4 < 0$

$a(a+3) < 4$

$a = 0 \quad a = -3$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad 0 \quad a$

$a \neq 0$

$a \in (-3; 0)$

Ats: $a \in \cancel{(-\infty; -4)} \cup (-4; 1) \cup (1; +\infty)$

45 pav. 9 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

Persimokymo pavyzdžiu galėtų būti toks sprendimas (žr.46 pav.).

$ax^2 + 6x + 3 \neq 2x - a$.

$ax^2 + 4x + 3 - a \neq 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot a \cdot (3-a) = 16 - 12a + 4a^2$

$16 - 12a + 4a^2 = 0$

$D = 12^2 - 4 \cdot 16 \cdot 4 = 144 - 256 = -112$

$x_1 = \frac{16 - 12a + 4a^2}{2a} = \frac{8}{a} - 6 + 2a$

$k = y'$ a – tai bet koks skaičius

$y' = (ax^2 + 6x + 3)' = 2xa + 6$

$y' = (2x - a)' = 2$

had neturėti bendrų taškų šios f-jos, turi būti ~~skaitiniai~~ – ~~y~~ būti lygus jo kryptinis koeficientai; nes jos taisyklė tris kyšiagrečios ir nelinis vieno taško.

$2xa + 6 = x$

$2xa - x = -6$

$x(2a - 1) = -6$

$2a - 1 = \frac{-6}{x}$

$2a = -\frac{6}{x} + 1$

$a = -\frac{6}{2x} + \frac{1}{2}$

46 pav. 9 uždavinio sprendimo 5 pavyzdys

13. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{8}(3^{x+1}-3^{x-1})=0,(3).$$

(3 taškai)

47 pav. 13 uždavinio sąlyga

Šia rodikline nelygybe yra tikrinamas mokinio gebėjimai:

- periodinę trupmeną pakeisti paprastąja;
- atlikti veiksmus su laipsniais;
- užrašyti paprasčiausios rodiklinės lygties sprendinį.

Uždavinys yra nesunkus. Vis dėlto nulių skaičius įvertinimuose (15,2 proc.) yra didokas. Matyt, dalį mokinių suglumino periodinė trupmena (yra tiesiog tuščių puslapių). Tačiau periodinė trupmena (pagal peržiūrėtus sprendimus) nebuvo pagrindinė kliūtis išspręsti uždavinį. Po teisingos pradžios daromos labai šiurkščios klaidos (žr. 48 pav.). Žinoma, yra ir puikiai parašytų sprendimų (49 pav.).

$$\frac{1}{8}(3^{x+1}-3^{x-1})=\frac{1}{3} \quad \Big| : \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{8}(3^{x+1}-3^{x-1})=1$$

$$\frac{9^{x+1}}{8}-\frac{9^{x-1}}{8}=\left(\frac{9}{8}\right)^0$$

$$x+1-x-1=0$$

$$0=0 \qquad x \in \cancel{R}\, R$$

Atsakymas: $x \in R$

48 pav. 13 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

$$0,(3)=\frac{0,3}{1-0,1}=\frac{0,3}{0,9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8}(3^{x+1}-3^{x-1})=\frac{1}{3} \quad \Big| \cdot 8$$

$$(3^{x+1}-3^{x-1})=\frac{8}{3}$$

$$3\cdot 3^x-\frac{3^x}{3}=\frac{8}{3} \quad \Big| \cdot 3$$

$$9\cdot 3^x-3^x=8$$

$$8\cdot 3^x=8 \quad \Big| : 8$$

$$3^x=1$$

$$3^x=3^0$$

$$x=0$$

Atsakymas: $x=0$

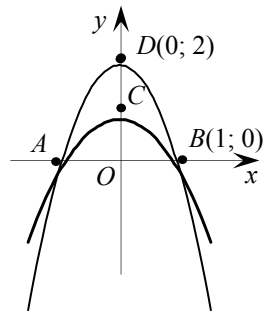
49 pav. 13 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

17. Paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = -x^2 + 1$ ir $y = -2x^2 + 2$ grafikai.

1. Raskite taškų A ir C koordinates. *(1 taškas)*

2. Įrodykite, kad kreivinės figūros *ACBOA* plotas lygus $\frac{4}{3}$. *(2 taškai)*

3. Apskaičiuokite kreivinės figūros *ADBCA* plotą. *(2 taškai)*

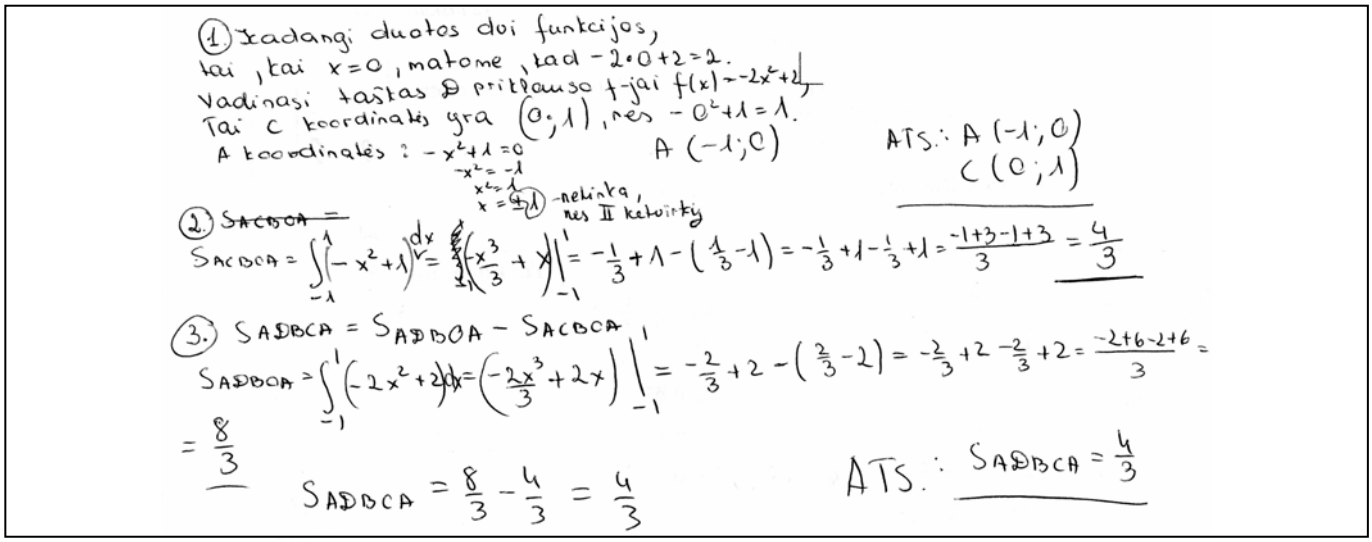


50 pav. 17 uždavinio sąlyga

Tai sudėtinis probleminis uždavinys. Sprendžiant jį reikia:

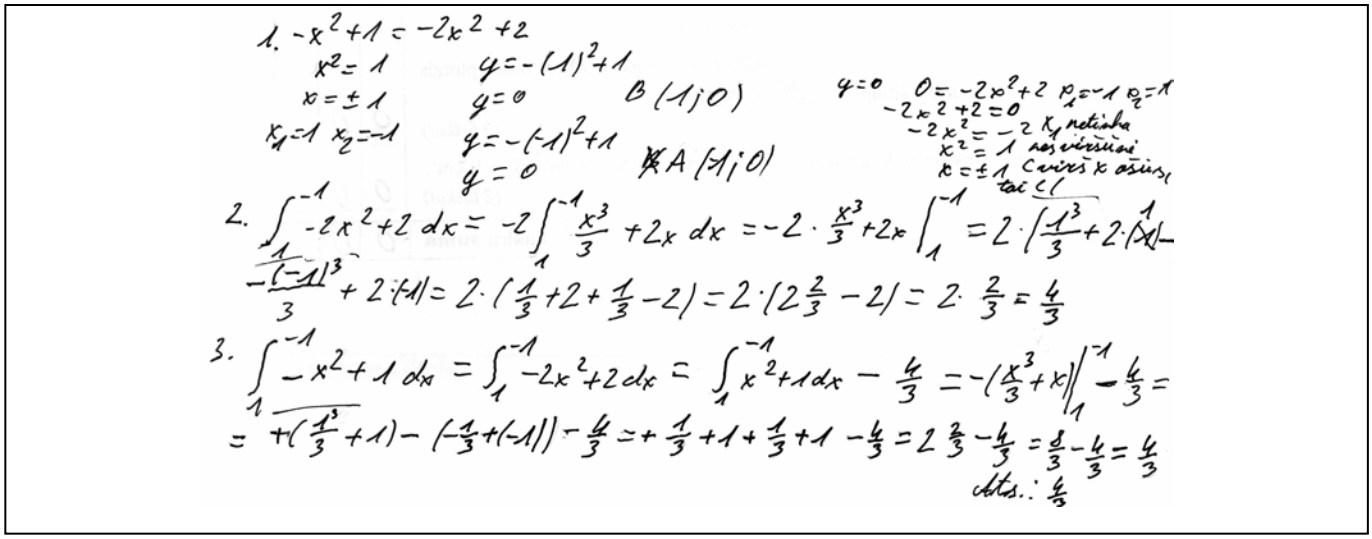
- gebėti nustatyti, kurią kvadratinę funkciją atitinka viena parabolė, kurią – kita;
- pagal kreivės lygtį rasti du parabolės taškus (*A* ir *C* koordinates);
- gebėti taikyti integralą paprastų plokštumos sričių plotams apskaičiuoti.

Uždavinio sąlyga aiški ir nesudėtinga. Tačiau daugeliui mokinių pirmoji uždavinio dalis, matyt, buvo labai neparanki, nes jų darbuose tėra užrašytos (be paaiškinimų) taškų *A* ir *C* koordinatės. Galima rasti sprendimų, kuriuose skaičiavimai pateikti su aiškinimais, tačiau šie aiškinimai nepakankamai sklandūs (žr. 51 pav.). Kitos dvi uždavinio dalys paprastai net neaiškinamos – rašomi tik skaičiavimai (žr. 51 pav.).



51 pav. 17 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Greta iš esmės priimtinų sprendimų yra ir tokių, kurie rodo labai prastą matematinį raštingumą. Pavyzdžiui, pagal 52 paveiksle pateiktą sprendimą net sunku suprasti, kaip šiam mokiniui pasisekė rasti teisingus atsakymus.



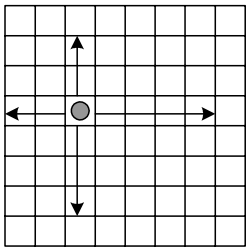
52 pav. 17 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

IV. KOMBINATORIKA, TIKIMYBĖS IR STATISTIKA

Šiai sričiai galima priskirti tik du uždavinius – 11 ir 14.

11. Paveiksle pavaizduotos šachmatų lentos viename iš langelių padėta šachmatų figūra – bokštas ir parodytos šios figūros galimos judėjimo kryptys (bokštas gali judėti nurodytomis kryptimis ir užimti bet kurį langelį kiekviena nurodyta kryptimi). Keliais skirtingais būdais šachmatų lentoje galima taip padėti du bokštus, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti (du bokštai kerta vienas kitą, kai jie gali užimti vienas kito langelį).

(3 taškai)

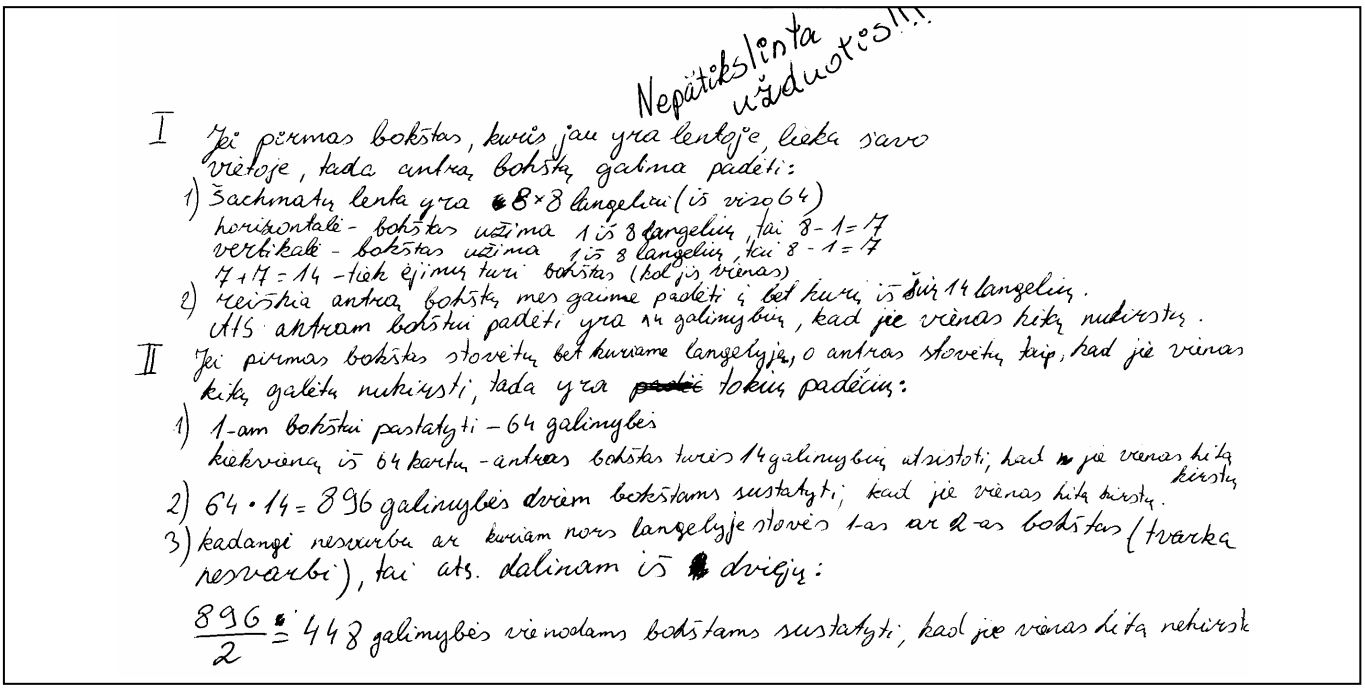


53 pav. 11 uždavinio sąlyga

Tai lengvas kombinatorikos uždavinys, nes nereikia jokių specialių teorijos žinių jam išspręsti. Vis dėlto net 70,48 proc. kandidatų už šį uždavinį gavo po *0 taškų*. Dominuoja kraštutiniai įvertinimai – *0* arba *3 taškai*. Matyt, taip atsitiko dėl to, kad suvokęs uždavinio sąlygą, mokinys lengvai apskaičiavo sandaugą 64·14 (64 galimybės vienam bokštui užimti konkretų langelį ir (visais atvejais) po 14 langelių antrajam bokštui, kad galėtų kirsti arba būti kertamas). Tačiau esmės nesuvokęs mokinys blaškėsi tarp įvairių kombinatorikos formulių ir sunkiai paaiškinamų samprotavimų. Taip pat derėtų atkreipti dėmesį į uždavinio skiriamąją gebą – ji yra nebloga (35,35).

Kritikuotinas aiškiai per didelis taškų skaičius (3 taškai) už šį uždavinį. Pirmiausia, kad tarpinių veiksmų iš esmės nėra (jie gali atsirasti tik klaidžiojant), todėl tarpinius įvertinimus iš anksto (instrukcijoje) sunku apibūdinti.

Daliai mokinių abejonių sukėlė uždavinio sąlyga (žr. 54 pav.).



Nepatikslinta užduotis!!!

I Jei pirmas bokštas, kuris jau yra lentoje, lieka savo vietoje, tada antrą bokštą galima padėti:

1) Šachmatų lenta yra 8×8 langeliai (iš viso 64)
horizontalė - bokštas užima 1 iš 8 langelių, tai 8 - 1 = 17
vertikalė - bokštas užima 1 iš 8 langelių, tai 8 - 1 = 17
17 + 17 = 14 - tiek ėjimų turi bokštas (kol jis vienas)

2) reiškia antrą bokštą mes galime padėti į bet kurį iš šių 14 langelių.
Ats: antram bokštui padėti yra 14 galimybių, kad jie vienas kitą nukirstų.

II Jei pirmas bokštas stovėtų bet kuriame langelyje, o antras stovėtų taip, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti, tada yra ~~padėti~~ tokių padėčių:

1) 1-am bokštui pastatyti – 64 galimybės
kiekviena iš 64 kartų - antras bokštas turės 14 galimybių atsistoti, kad jie vienas kitą kirstų

2) 64 · 14 = 896 galimybės dviem bokštams sustatyti, kad jie vienas kitą kirstų.

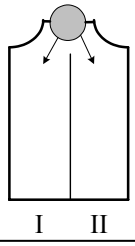
3) kadangi nesvarbu ar kuriam nors langelyje stovės 1-as ar 2-as bokštas (tvarka nesvarbi), tai ats. dalinam iš dviejų:

$\frac{896}{2} = 448$ galimybės vienodams bokštams sustatyti, kad jie vienas kitą nekirsk

54 pav. 11 uždavinio sprendimo pavyzdys

14. Į žaidimo urną mestas rutuliukas su vienodomis tikimybėmis gali įkristi į bet kurią iš dviejų urnos sekcijų – į pirmąją arba į antrąją (žr. pav.). Į šią urną įmesti trys rutuliukai. Sakykime, X – rutuliukų skaičius pirmojoje sekcijoje. Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

(3 taškai)



55 pav. 14 uždavinio sąlyga

Tai tikimybių teorijos uždavinys, kuriuo galima patikrinti, kaip mokinys suvokia atsitiktinį dydį bei jo skirstinį. Kartu yra tikrinami jo gebėjimai skaičiuoti įvykių tikimybes. Taikant klasikinę formulę (tada uždavinys yra programinis) reikia apibūdinti eksperimento baigtį, sudaryti baigčių aibę, įvertinti baigčių lygiavertiškumą. Tikimybių skaičiavimai yra visiškai paprasti, nes baigčių aibę galima apibūdinti aštuoniomis vienodai galimomis baigtimis.

Tarp nagrinėtų darbų buvo tik keletas tokių, kuriuose skirstiniai sudaryti taikant klasikinę tikimybės formulę. Tačiau sprendimai nepakankamai paaiškinti (žr. 56 pav.).

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Įvykiai:

$e_1 =$ NNN
$e_2 =$ NPN
$e_3 =$ PNN
$e_4 =$ NNP
$e_5 =$ PNP
$e_6 =$ NPP
$e_7 =$ PPN
$e_8 =$ PPP

56 pav. 14 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Daugiau buvo sutinkama sprendimų, kuriuose uždavinys suvokiamas kaip Bernulio bandymų schema. Tarp šių sprendimų yra ir labai gerai atliktų (57 pav.), ir gana paviršutiniškai (58 pav.).

A – įvykis, kai rutulinkas įkrenta į pirmąją lauką.

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$; $p = 0,5$ $q = 0,5$

m	0	1	2	3
P(y=m)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(x=0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$P(x=1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$P(x=2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$P(x=3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot p^{3-3} = 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$

57 pav. 14 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

1) $p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P_0(3) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{3!}{3!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$P_1(3) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$P_2(3) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{3!}{3!} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$

2)

X	0	1	2	3
P = X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

58 pav. 14 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Bernulio bandymų schemos taikymas rodo, kad daug kandidatų buvo ją studijavę mokykloje (matyt, peržengdami valstybinio egzamino programą). Šios schemos taikymas nereikalauja (sprendžiant uždavinį) rimtesnio įsigilinimo į sąlygą, todėl sumažėja klaidų tikimybė.

Nemaža dalis kandidatų (net 35,45 proc.) šio uždavinio visiškai nesprendė arba sprendė jo nesupratę ir todėl darė esminių klaidų (įvertinimai – *0 taškų*). Uždavinio skiriamoji geba gana didelė (64,24). Mokiniams šis uždavinys buvo sunkus.

IŠVADOS

2006 metais norint išlaikyti matematikos valstybinį brandos egzaminą reikėjo surinkti 11 taškų iš 52, (egzamino neišlaikė apie 21 proc. mokinių), o 2005 metais – 9 taškus iš 50 (neišlaikė 20 proc.). Ankstesniais metais apatinė surinktų taškų suma, reikalinga egzaminui išlaikyti buvo dar mažesnė, todėl lyginti kelerių metų egzaminų rezultatus nekorektiška.

Matematikos valstybinio brandos egzamino užduotis buvo parengta pagal programą; tik užduoties sąsiuvinyje nevisos pateiktos numatytos formulės.

Pažymėtina, kad yra palyginti geri daugumos uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais įvertinimai. Šių uždavinių sprendimų nereikėjo rašyti. Deja, vertinant uždavinius, kurių sprendimus reikėjo rašyti, daugumos mokinių darbuose, kaip ir ankstesniais metais pastebėta trūkumų:

- išryškėjo nemažai bazinių žinių ir standartinių procedūrų taikymo spragų;
- trūko dėstomų teiginių argumentavimo, korektiško uždavinio sprendimo užrašymo.

Lyginamoji analizė kelia abejonių, ar verta uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais įtraukti į valstybinio egzamino užduotį. Juos derėtų keisti įvairiais trumpo sprendimo uždaviniais.

Šiais metais daug mokinių negebėjo pasirinkti tinkamų matematinių terminų ir simbolikos. Mokytojai į tai turėtų atkreipti dėmesį, ypač dėstydami naują algebros, funkcijų ir analizės pradmenų medžiagą, o vėliau vertindami mokinių savarankiškus ir kontrolinius darbus.

Mokiniai turėtų žinoti, kad dažnai matematikos uždaviniai gali būti sprendžiami įvairiais būdais. Vertėtų juos skatinti nebijoti pradėti spręsti uždavinį, nors ir abejoja, ar pavyks jį teisingai išspręsti iki galo.

Rekomenduotume mokytojams kartu su mokiniais dažniau aptarti įvairias uždavinio sprendimo aprašymo galimybes. Tai svarbu, nes kiekvienu uždaviniu yra tikrinami ir vertinami įvairūs mokinio gebėjimai.