2014 m. matematikos brandos egzamino užduoties analizė

Analizę atliko:
Doc. dr. Edmundas Mazėtis, Vilniaus universiteto, Matematikos ir informatikos fakulteto, matematikos ir informatikos metodikos katedros vedėjas
dr. Aivaras Novikas, Vilniaus universiteto, Matematikos ir informatikos fakulteto, Matematikos ir informatikos metodikos katedros lektorius
Danguolė Jonaitienė, Vilniaus licėjaus matematikos mokytoja metodininkė
Irma Zaveckaitė, Vilniaus Gabijos gimnazijos matematikos mokytoja metodininkė

Visuomenėje kilus ažiotažui dėl šių metų matematikos valstybinio brandos egzamino užduoties korektiškumo, joje pasitaikiusių kandidatams neaiškių ir nesuprantamų teiginių, dėl užduoties ir egzaminų programos bei vidurinio ugdymo programos atitikimo, Nacionalinis egzaminų centras pakvietė nepriklausomus ekspertus išreikšti savo nuomonę apie šių metų matematikos valstybinio brandos egzamino užduotį.

1. Egzamino vertinimo prielaidos

Savo išvadas darėme remdamiesi Vidurinio ugdymo matematikos dalyko programa, Matematikos brandos egzamino programa, NEC pateikta matematikos valstybinio brandos egzamino rezultatų statistika, egzamino darbus vertinusių mokytojų pastabomis. Siekdami objektyvumo, atsiribojame nuo viešojoje erdvėje skambėjusios egzamino kritikos, kad užduotis buvo per sunki, kai kurie uždaviniai buvo ne taip suformuluoti ir pan., kaip išankstinės nuomonės.

Kaip rašoma Matematikos brandos egzamino programoje, „egzamino tikslas – patikrinti ir įvertinti mokinio mokymosi pagal vidurinio ugdymo matematikos bendrąją programą pasiekimus“. Ekspertų grupė, atlikdama užduoties analizę, laikėsi nuostatos, kad valstybinio brandos egzamino užduoties vertinimo negalima atsieti nuo esminio klausimo, kaip užduotis atitinka šį tikslą, t. y. kaip ji atskleidžia (ar neatskleidžia) kandidatų matematinio pasirengimo lygį. Tai, regis, ypač svarbu pabrėžti šiuo metu, kai viešojoje erdvėje plačiai aptartas egzaminas buvo vertinamas, daugiabalsės viešos diskusijos dalyviams žvelgiant į jį iš savo asmeninių pozicijų.

Egzaminas turi sąžiningai „patikrinti ir įvertinti“, o ne atitikti su egzamino tikslu nesiejamus lūkesčius. Mūsų nuomone, užduotis neturi būti *patogi* kiekvienam laikančiajam egzaminą, neprivalo būti suprantama ir lengvai išsprendžiama kiekvieno kandidato, kaip ir joks sąžiningas patikrinimas neprivalo būti *patogus*. Įvertinimo turi būti nusipelnoma, jis nėra prizas, atsitiktinai laimimas žaidime, nei dovana, duodama iš dosnumo ar noro pamaloninti apdovanotąjį.

Taip pat norėtume pabrėžti, kad mokinio mokymosi pasiekimus, apie kuriuos kalbama egzamino programoje, matematinį abituriento pasirengimą derėtų suvokti kiek giliau, ne vien formaliai matuojant vidurinio ugdymo matematikos bendrąja programa. „Matematinė kompetencija“ minėtoje ugdymo programoje (Vidurinio ugdymo bendrųjų programų 3 priedas) nurodyta kaip matematikos mokymo mokykloje tikslas. Kompetenciją galima suvokti kaip tam tikrą objektyvią vidinę mokyklos išugdyto jauno žmogaus įgytą vertingą savybę. Laikytina dideliu trūkumu, jei egzaminas, nors formaliai ir įvertindamas pasiekimus, neparodytų ir neatskirtų šią savybę įgijusių kandidatų, nuo jos neturinčių.

Mokymosi rezultatas, kuriam suteikta skaitinė išraiška, pelnytas egzamino įvertinimas turi rodyti, kiek mokyklą baigęs žmogus yra užaugęs, sustiprėjęs (koks jo mąstymas, pažinimas, gebėjimai ir pan.), taip pat kiek prasmingi, gyvi, turiningi jo santykiai su matematika. Tarkime, nei matematika neturi būti „apiplėšta“, apribojant ją aklu uždavinių sprendimo algoritmų atkartojimu, nei mokinys paverčiamas algoritmų atkartojimo automatu, nesuvokiančiu, ką daro.

Taigi vertinant egzaminą, svarstant, koks jis turi būti, reikia nepamiršti, koks turi būti matematikos mokymas mokykloje. Egzaminu vertinami rezultatai mokymo(si), kuriam savo ruožtu turi būti keliami tam tikri reikalavimai, būtini, kad „matematinė kompetencija“ neliktų vien tuščiais žodžiais. Todėl logiška, kad ir egzaminas vertinamas atsižvelgiant į šiuos reikalavimus. Atkreipiame dėmesį į pagundą apversti aukštyn kojomis hierarchiją „egzaminas dėl mokymo pasiekimų, o mokymas dėl matematinės kompetencijos“. Egzaminas iš priemonės virsta galutiniu formaliu tikslu, dėl kurio mokomasi, o mokymasis atsiejamas nuo tikro matematinės kompetencijos siekimo. Kai taip nutinka, nėra ko stebėtis, kad matematinės kompetencijos lygis krinta (juk jos ir nesiekiama), o iš egzamino norima visai ne to, kam jis skirtas.

Egzaminas neišvengiamai yra vertinamas matematikos mokymo mokykloje situacijos fone. Juk jeigu toje situacijoje yra neigiamų reiškinių (o nuomonė, kad jų esama rimtų, paplitusi ir ne kartą buvo išsakyta), tai egzaminas visada susilauks kritikos, tokiu būdu netiesiogiai kritikuojant matematikos mokymo tendencijas. Tuo atveju, jei egzaminas bus rengiamas prisitaikant ir susitaikant su neigiamais reiškiniais, jis bus kritikuojamas kaip per lengvas, kaip neatspindintis tikrosios padėties, pataikaujantis mokinių nemokėjimui. Tuo atveju, jei egzaminas bus rengiamas, kad atskleistų ir parodytų tikrąją situaciją, jį kritikuos kaip per sudėtingą, nesigilinant bus sakoma, kad jei kandidatų rezultatai prasti, tai ir pats egzaminas prastas. Iš čia išplaukia išvada, kad problemų, kylančių dėl egzamino, neįmanoma išspręsti nesprendžiant problemų, kylančių dėl matematikos mokymo.

Mūsų nuomone, valstybinio egzamino užduotis privalo parodyti tikrąją situaciją, o ne iškreiptą vaizdą. Kitaip ji, pirma, neatitiktų egzamino tikslo patikrinti ir įvertinti; antra, juo labiau neatsižvelgtų į gilesnę mokymosi pasiekimų vertinimo prasmę, t. y. kurtų matematinės kompetencijos turėjimo iliuziją, skatintų klaidingą kompetencijos supratimą.

Būtų nenormalu, jei lengvą užduotį nesunkiai įveiktų tie, kurie nėra tinkamai pasiruošę, o visuomenė džiūgautų, kokia gera mūsų matematinio švietimo sistema, kokie puikūs vadovėliai, kaip gerai dirba mokytojai ir kaip stengiasi mokiniai. Valstybinis egzaminas turi rodyti tikrą, nepagražintą padėtį. Beje, ne egzamino užduočių sudarymas, ne egzamino organizavimo būdas, ne vertinimo instrukcijos, ne vertintojų ar Nacionalinio egzaminų centro apsisprendimas, kiek balų surinkę kandidatai išlaikys egzaminą, lemia matematinio švietimo padėtį Lietuvos mokyklose. Manome, kad egzamino užduotis tuo geresnė, kuo objektyviau ji šią padėtį atspindi.

Neatsitiktinai visuomenės akiratyje atsiduria ir diskusijas sukelia būtent matematikos egzaminas. Tai susiję ne vien su esama konkrečia situacija, bet ir su pačia matematikos prigimtimi. Griežtas reiklumas, be kurio negalima gauti teisingo atsakymo, skaidrus aiškumas, neišvengiamai patikrinantis žmogaus mąstymo kultūros lygį, ypač būdingi matematikai ir negali nebūti iššūkiu bet kuriai abiturientų kartai ir mokytojams. Kita vertus, matematikai būdingas universalumas, jos reikalingumas visiems lemia ir tai, kad matematikos egzaminą laiko ne tik ją mėgstantieji, bet ir mažiau vidinės motyvacijos ja domėtis turintieji. Todėl matematikos padėties mokykloje, matematikos brandos egzamino problemoms būdinga sava specifika, neleidžianti tiesiogiai matematikos egzamino situacijos gretinti su kitų brandos egzaminų situacija.

2. Užduoties analizė

Aptarkime egzamino uždavinius. Kiekvienu atskiru atveju mums rūpės formuluotės korektiškumas, uždavinio tipas, konkrečios žinios ir gebėjimai, kuriuos mokinys turėjo pademonstruoti, kad išspręstų uždavinį, tai, ar uždaviniai atitinka egzamino programą, kiekvieno uždavinio sunkumas (taip pat statistinis).

Uždavinio sunkumas pagal rezultatus rodo, kiek uždavinys buvo sunkus kandidatams, – tai visų kandidatų surinktų taškų sumos ir visų teoriškai galimų surinkti taškų sumos santykis. Jei uždavinys buvo vertinamas vienu balu, tai uždavinio sunkumas rodo, kuri dalis kandidatų tą uždavinį išsprendė teisingai. Taip pat galima kalbėti apie uždavinio sunkumą pagal turinį, t. y. pagal uždavinio sprendimo elementų objektyvų sunkumą. Prie sunkesnių galėtume priskirti tuos uždavinius, kuriuos sprendžiant reikia atlikti daugiau loginių veiksmų, pademonstruoti įvairių kurso temų žinias, kurių sprendimas yra ilgesnis ar bent kiek nestandartinis. Jei uždavinys pagal rezultatus sunkus, o pagal turinį ne, t. y. jo sprendime nėra sunkių elementų, tai rodo, kad kandidatai neįgijo tam tikrų reikalingų gebėjimų.

Siekiant tinkamai įvertinti kandidatų pasiekimus, egzamino užduotyje turi būti tinkama lengvesnių ir sunkesnių uždavinių proporcija, turi būti ir lengvų, ir sunkių uždavinių. Pasiekimų nevertina ir net trukdo juos vertinti nekorektiškos formuluotės, egzamino programos neatitinkantys uždaviniai. Tas pats pasakytina apie labai sunkius (per sunkius) uždavinius, kuriems išspręsti reikia per daug laiko (per ilgas sprendimas), per daug sekinančių pastangų, reikia išskirtinių sugebėjimų. Pasiekimams vertinti svarbi ir uždavinių tipų, tikrinamų žinių ir gebėjimų įvairovė.

Uždavinius pagal sunkumą sugrupavome į 4 dalis. Uždavinys, kurio sunkumas (pagal rezultatus) didesnis už 0,5, laikytinas lengvu (surinkta daugiau nei pusė visų taškų), o kurio sunkumas didesnis už 0,7 – net labai lengvu. Sutarėme, kad vidutinio uždavinio sunkumas yra tarp 0,2 ir 0,5, o sunkiais laikėme uždavinius, kurių sunkumas mažesnis už 0,2.

I dalis

1 uždavinys – standartinis, tinkamai suformuluotas, tikrinantis bendriausią kandidato nuovoką apie funkciją: kaip kandidatai supranta, ką reiškia taško priklausymas funkcijos grafikui; ar jie suvokia, kas apskritai sieja funkciją su jos grafiku. Teisingą atsakymą nurodė 75 proc. kandidatų.

2 uždavinys – geometrinis, apie panašiuosius trikampius. Lygiagrečių tiesių savybės leidžia pastebėti lygius kampus, atrasti panašiuosius trikampius, o juos nagrinėjant prisiminti kraštinių ilgių proporcingumą. Kad trikampiai panašūs, mokinys turi pastebėti pats, bet šią užduotį palengvina aiškus brėžinys. Čia reikia matematinio pastabumo bei mokėjimo naudotis brėžiniu, susiorientavimo geometrinėje situacijoje, prieš atrandant ryšį tarp duotų ir ieškomo skaičių. Taigi esama papildomo laiptelio, siekiant rezultato. Vadinasi, šis uždavinys nėra labai lengvas pagal turinį. Toks jis ir pagal rezultatus (teisingą atsakymą nurodė 53 proc. kandidatų).

MN vienoje sąlygos vietoje yra tiesė, o kitoje – atkarpa. Mūsų nuomone, tai kandidatų neturėjo klaidinti, nes tekste aiškiai nurodyta, kada turima galvoje tiesė, o kada atkarpa. Matematiniams objektams suteikiamų vardų vienatis reikalinga tam, kad matematinis tekstas nebūtų dviprasmiškas. Šiuo atveju tekstas ir nėra dviprasmiškas. Žymėti dviem raidėmis tiek tiesę, tiek atkarpą yra matematinės kalbos norma, mokiniai su ja supažindinami mokykloje. Toks vardų suteikimas sietinas su jų informatyvumu: čia matematinio objekto vardas ne tik atskiria objektą nuo kitų, bet ir vienareikšmiškai (ir trumpai) apibrėžia jį. Pavyzdžiui, tiesė MN yra ta vienintelė tiesė, kuri eina per taškus M ir N, o atkarpa MN yra ta vienintelė atkarpa, kurios galai yra M ir N. Aišku, galima pirmąjį sąlygos sakinį suformuluoti ir kitaip: tiesė c kerta tieses a ir b atitinkamai taškuose M ir N. Tai kiek pailgintų sąlygą, bet ar padarytų ją aiškesnę?

Mokykloje privalo būti akcentuojama matematinių teiginių aiškumo ir nedviprasmiškumo svarba. Tai reiškia, kad mokytojas turėtų taisyti mokinį, kalbantį apie MN, tuo atveju, kai neaišku, ar tai tiesė, ar atkarpa. Jei mokiniams lieka svetimas vienareikšmiškumo principas, tai jau priekaištas mokyklai, o ne uždaviniui, kuris šiuo atveju minėtojo principo nė nepažeidžia.

3 uždavinys yra standartinis, tikrinantis, kaip kandidatai žino imties medianos sąvoką. Pagal turinį tai labai lengvas uždavinys, nors teisingai jį sprendė tik 52 proc. kandidatų.

4 uždavinys yra geras ir tinkamai suformuluotas. Jis parodo, kiek kandidatai įsisavino skaitinių nelygybių savybes ir kiek suvokia skaičių vaizdavimą skaičių tiesėje. Šį uždavinį teisingai išsprendė beveik 74 proc. kandidatų, taigi jis priskirtinas prie lengvų.

5 uždavinys yra standartinis skaičiavimo uždavinys, tikrinantis kandidatų gebėjimus operuoti iracionaliaisiais skaičiais, panaikinti iracionalumą vardiklyje. Atlikę veiksmus skaičiuotuvu, kandidatai galėjo teisingai parinkti atsakymą, net neperkeldami iracionalumo iš vardiklio į skaitiklį. Šis uždavinys lengvas ir pagal turinį, ir pagal išsprendusiųjų skaičių – jį sėkmingai atliko 62 proc. kandidatų.

6 uždavinys tikrina gebėjimus rasti įvykių sąjungos tikimybę, pasinaudoti įvykių nepriklausomumu ją skaičiuojant. Uždavinio formuluotėje žodžiai „suveikia“ ir „veikia“ žymi iš esmės tą patį, kas aišku iš uždavinio sąlygos. Tačiau psichologiškai uždavinys galėjo būti priimtinesnis kandidatams, jei būtų panaudotas vienas ir tas pats žodis. Uždavinį teisingai išsprendė 55 proc. kandidatų. Tai – kiek prastesnis rodiklis.

Uždavinys neišsprendžiamas nemokant apskaičiuoti nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės. Brandos egzamino programoje (kitaip nei Vidurinio ugdymo bendrojoje programoje) nėra tiesiogiai nurodyta, kad mokinys turi mokėti tai daryti. Joje nurodyta (Reikalavimai pagal išplėstinio kurso programą, 4.2), kad mokinys turi mokėti taikyti formulę $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$ nepriklausomiems įvykiams. Formulė galioja bet kokiems įvykiams, bet naudinga tik nepriklausomiems tuo atveju, jei mokama toliau apskaičiuoti ir įvykių sankirtos tikimybę. Taigi mokėjimas šią formulę taikyti turėtų reikšti ir nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės formulės žinojimą, kitaip reikalavimas neturėtų jokios prasmės. Siūlome padaryti šią egzamino programos vietą aiškesnę, kad nebūtų nė menkiausio pagrindo teigti, remiantis netikslia formuluote, jog nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės kandidatai gali nemokėti.

7 uždavinys yra lengvas, tikrinantis, ar kandidatai geba nustatyti kubo įstrižainės ir briaunos ilgių ryšį, ar supranta briaunainio paviršiaus sąvoką. Jį sėkmingai išsprendė 53 proc. kandidatų. Taigi čia uždavinio sunkumas pagal rezultatus ir pagal turinį nesutampa. Geometrijos uždaviniai visada kėlė daugiau sunkumų mokiniams. Tai bent iš dalies susiję su kiek kitokiu vaizduotę su formulėmis bei skaičiavimais derinti reikalaujančiu mąstymu geometrijoje, o juk čia brėžinio nėra. Tai galėjo kliudyti kandidatams, nepratusiems savarankiškai pasitelkti geometrinę vaizduotę. Liūdna, kad tai turi poveikį net sprendžiant nesudėtingą uždavinį.

8 yra aiškus uždavinys, jo formuluotė – trumpa, lengvai atpažįstama. Sprendimas nėra painus. Uždavinio funkcija – patikrinti, ar kandidatai moka spręsti lygtį, kai nuliui prilyginta kelių dauginamųjų sandauga. Viena iš priežasčių, kodėl šio uždavinio sprendimo statistika prasta, gali būti ta, kad mokykloje mokiniai, deja, neišmoksta, jog sandauga lygi nuliui tada, kai vienas dauginamasis lygus nuliui, o kitas turi prasmę. Šį uždavinį išsprendė tik 47 proc. kandidatų. Be to, beveik trečdalis kandidatų rado du lygties sprendinius, t. y. greičiausiai padarė labiausiai tikėtiną klaidą – vienos reikšmės nepatikrino. Nepastebėti, kad viena iš reikšmių netinka, – matematinio reiklumo, kuris reikalingas gerai mokančiam matematiką žmogui, stygius. Šio reiklumo neturinčiajam svarbu tik automatiškai atlikti įprastą matematinį veiksmą (prilyginti nuliui dauginamuosius ir išspręsti gautas lygtis), o atsakymas yra šio veiksmo rezultatas ir nieko daugiau. Matematinė situacija niekaip nereflektuojama, gautasis rezultatas netikrinamas. Tokio matematinio automatizmo tendencija skurdina mokyklinę matematiką, su šia tendencija reikėtų kovoti, nes čia uždavinį išsprendusiųjų skaičių mažina visai ne uždavinio sunkumas pagal turinį.

9 uždavinys – tai standartinis uždavinys, nors kiek žaismingiau suformuluotas. Jis tikrina, kaip kandidatai suvokia procentų sąvoką, o papildomai – ir techninius aritmetinių veiksmų gebėjimus. Norėtųsi, kad šį visiškai standartinį, iš esmės techninį uždavinį išspręstų daugiau nei 54 proc. egzamino dalyvių. Labai daug laikiusiųjų pasirinko klaidingą atsakymą D 0,542 proc. Atrodo, kad neatsitiktinai: sąlygoje yra skaičius 3,142. Taigi iki kone 38 proc. kandidatų atsakymą rinkosi vien dėl pastebėto skaičių dešimtainių išraiškų panašumo, nespręsdami šio banalaus turinio uždavinio.

10 uždavinys pagal turinį yra labai lengvas, standartinis, tinkamai suformuluotas, tikrinantis elementariausias trigonometrijos žinias ir paprasčiausių algebrinių pertvarkymų mokėjimą. Tai, kad jį išsprendė tik 45 proc. kandidatų, rodo, jog minėtas temas kandidatai nepakankamai išmoko.

11 uždavinys yra standartinis išvestinių skaičiavimo pratimas. Jį išsprendė apie 63 proc. kandidatų, taigi tai gana lengvas uždavinys tiek pagal turinį (išplėstinio kurso kontekste), tiek pagal rezultatus.

Spręsdami 12 uždavinį, kandidatai turėjo parodyti, kad jie žino, kaip rasti funkcijos grafiko ir *Ox* ašies susikirtimo taško koordinates, ir moka spręsti nesudėtingas rodiklines lygtis. Situacija panaši į 1 uždavinio, tik šiek tiek sudėtingesnė. Šį uždavinį išsprendė apie 60 proc. kandidatų, taigi jis nebuvo sunkus.

Pirmosios (uždavinių su pasirenkamaisiais atsakymais) dalies uždaviniai iš esmės yra standartiniai, jie tikrino, kaip kandidatai žino pagrindines mokyklinės matematikos sąvokas ir kaip geba atlikti standartines procedūras. Nepaisant uždavinių lengvumo ir standartiškumo, kandidatai klydo juos spręsdami, ypač kur nepakako automatiškai atlikti vieną ar kitą veiksmą:

2 uždavinyje reikia ne vien išmanyti panašiųjų trikampių savybes, bet ir pastebėti, kad trikampiai panašūs;

7 uždavinyje nėra brėžinio, todėl be brėžinio reikėjo įsivaizduoti kubą ir nagrinėti jį atkarpų ilgių ir paviršiaus ploto požiūriu;

8 uždavinyje reikėjo ne tik atlikti veiksmus, pereinant prie atskirų dauginamųjų, bet ir reflektuoti rezultatą pradinės lygties požiūriu;

9 uždavinyje – turėti kantrybės ir dėmesingumo atliekant techninius aritmetinius veiksmus (nors tai šiek tiek kas kita nei nereflektavimas, bet čia taip pat nebuvo susikaupimo, reiškiančio bent kiek gyvesnį santykį su matematine situacija);

10 uždavinyje reikėjo ne vien žinoti tangento apibrėžimą, bet pastebėti jį duotoje lygybėje ir pagal tai pasirinkti trumpą, visai vaikišką lygybės pertvarkymo algoritmą (tas pats kaip išsireikšti lygtyje nežinomąjį, tik čia nežinomąjį reikia atpažinti).

Visais šiais atvejais reikia susikaupti ties aiškia, matoma, į akis krintančia, detalėse neskęstančia miniatiūrine situacija. Kad kandidatams tai kėlė problemų, gali liudyti gyvo santykio su matematika stoką, pažinimo formalumą, paviršutiniškumą.

Taip pat atkreipkime dėmesį į tai, kad visi geometriniai ir stochastiniai uždaviniai (2, 3, 6, 7), nors nėra sudėtingi, išspręsti prasčiau. Tai verčia susimąstyti apie šių dviejų temų – vienos bene labiausiai klasikinės ir leidžiančios pajusti matematikos skonį, o kitos moderniausios, aktualiausios – mokymo mokykloje problemas.

Šie pastebėjimai verčia tikrinti, ar įvardytos tendencijos nesikartoja ir kitose dviejose egzamino dalyse.

II dalis

13 uždavinys buvo skirtas patikrinti, kaip kandidatai žino išvestinės mechaninę prasmę ir kaip geba taikyti žinias konkrečiu atveju. Turinio atžvilgiu tai nesudėtingas uždavinys, bet tik 30 proc. kandidatų šį uždavinį išsprendė gerai. Taigi išvestinės mechaninė prasmė daugeliui kandidatų nėra iki galo aiški. Sąlyga verčia galvoti apie funkcijas bei apie kelią ir laiką. Nei išvestinė, nei greitis nėra minimi. Kandidatams tai galėjo apsunkinti užduotį (vienas sąvokas čia reikia susieti su kitomis, kurias reikia susieti tarpusavyje, prisiminus greičio ir išvestinės ryšį). Vėlgi matome orientavimosi situacijoje problemą, kai nepakanka vien atlikti žinomą veiksmą.

14 standartinio uždavinio tikslas – patikrinti, ar kandidatai atpažįsta aritmetinę progresiją, ar geba taikyti jos bendrojo nario ir pirmųjų *n* narių sumos formules. Net 62 proc. kandidatų šį uždavinį išsprendė teisingai, taigi jo sąlyga kandidatams buvo aiški, priešingai, nei manė kai kurie egzamino užduoties kritikai. Kandidatai mažiau klydo, nors reikėjo pastebėti dėsningumą. To galima priežastis –

uždavinio standartiškumas. Jei uždavinio sąlygoje būtų pasakyta, kad seka yra aritmetinė progresija, uždavinys būtų buvęs dar lengvesnis.

Jei dėl egzamino užduoties 2 uždavinio galėjo kilti klausimas, ar mokyklinėje matematikoje laikomasi matematinio teksto vienareikšmiškumo principo, tai kalbant apie šį uždavinį galima klausti, ar mokinius supažindinant su specialiomis sekomis – progresijomis, jie nėra apgaunami, ar jiems nesudaromas klaidingas įspūdis, kad kitokių sekų nė nebūna ar kad tėra du dėsningumai, pagal kuriuos gali kisti sekos nariai. Supratimas, kad seka yra platesnė sąvoka nei progresija, mokiniui turėtų būti suteikiamas, dėl to nebūtina į programą įtraukti papildomų temų, tereikia tvarkingai įvesti ir susieti šias dvi sąvokas. Netvarkinga, sąvokų hierarchijos nepaisanti matematika – jokia matematika. Kai tvarka paaukojama dėl intuityvaus standartinių užduočių sprendimų algoritmų išmokymo, matematinių veiksmų pavertimo įpročiu, netvarkinga žmogaus sąmonė galop tampa nepajėgi spręsti nė tų uždavinių, tampa priklausoma tik nuo įpročio, nesavarankiška. Tačiau visa tai tėra priekaištai mokyklai, o ne šiai egzamino užduočiai.

15 – tai nesunkus geometrinis uždavinys, tikrinantis, ar kandidatai žino, kad į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra pusiaukampinių sankirtos taškas, ar moka apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes, Pitagoro teoremą. Uždavinį išsprendė tik 34 proc. kandidatų. Tai vėl rodo, kad geometriniai uždaviniai mokiniams sunkiai sekasi. Jei prastai sekėsi pirmieji, lengvesni ir su atsakymų variantais, tai nestebina, kad šis uždavinys, reikalaujantis kiek ilgesnio techninio darbo, spręstas dar prasčiau.

16 uždavinys tikrina kandidatų elementarius gebėjimus rasti vektoriaus koordinates, kai žinomos jo pradžios ir galo koordinatės, žinoti bei mokėti pritaikyti vektorių skaliarinės sandaugos formulę. Tik 29 proc. teisingų sprendimų dar kartą įrodo, kad geometrija mokiniams sekasi sunkiai. Tiesa, šiuo atveju geometrinio mąstymo, kuriam būdinga vaizduotė, praktiškai nereikia, pakanka elementariausių žinių apie vektorius, skaitinius veiksmus su jų koordinatėmis. Vektorių tema egzamino programoje priskiriama išplėstiniam kursui, bet 88 proc. egzaminą laikiusiųjų mokėsi pagal išplėstinio kurso programą. Tai rodo, kad su vektorių tema mokykloje esama problemų. Kadangi uždavinys gana standartinis, tai gali liudyti, kad šiai temai skiriama per mažai dėmesio.

17 – tai standartinis tikimybių teorijos uždavinys. Jis tikrino, kaip kandidatai žino ir geba taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą. Uždavinį gerai išsprendė tik 31 proc. kandidatų.

Sąlyga suformuluota korektiškai, nors buvo manančių, kad sąlygoje be reikalo minimas standartinis šešiasienis lošimo kauliukas ir kad reikėjo paminėti, jog kauliuko metimai yra nepriklausomi. Mūsų nuomone, paminėjimas, kad kauliukas yra standartinis, t. y., kad tai yra kubo formos kauliukas, ant kurio sienų sužymėtos atitinkamos akutės 1, 2, 3, 4, 5, 6, yra vertingas, nes yra uždavinių, kuriuose nagrinėjami lošimo kauliukai su kitaip sužymėtomis akutėmis (žr. Matematika 12, I dalis. TEV, 2003, p. 155). O kad antrasis lošimo kauliukas metamas nepriklausomai nuo pirmojo, mokiniams yra natūralu ir to nebūtina papildomai aiškinti. Juk tai žodinis uždavinys, apeliuojantis į tam tikrą gyvenimišką patirtį. Pavyzdžiui, norint suprasti žodinį uždavinį apie automobilį, važiuojantį iš A į B, reikia būti mačiusiam automobilį ir mokėti matematizuoti uždavinį, gyvenvietes A ir B, patį automobilį interpretuojant kaip taškus. Taip ir čia gyvenimiška kauliuko mėtymo patirtis, jei nepasakyta kitaip, matematizuojama metimų rezultatus interpretuojant kaip nepriklausomus įvykius, nes gyvenime kauliuko metimai suvokiami kaip nepriklausantys vienas nuo kito.

Kaip jau minėjome, stochastika mokykloje suvoktina kaip probleminė, jautri sritis. Šio uždavinio sunkumas pagal rezultatus tai patvirtina. Vienas iš problemos šaltinių ir yra būtinybė ieškoti šioje srityje tinkamo ryšio tarp intuityvaus ir griežtai matematinio lygmenų. Pabrėžiant vien intuityvumą nukenčia matematinis korektiškumas, bet be intuityvaus lygmens ši sritis būtų tiesiog neprieinama mokinio suvokimui. Nėra kitos išeities be to, kad mokiniai (juo labiau jų mokytojai) aiškiai suvoktų matematinį mokyklinės tikimybių teorijos lygmenį ir gebėtų jį susieti su intuityviuoju, pavyzdžiui, interpretuodami žodinę uždavinio sąlygą. Iš tiesų tikimybinių uždavinių sunkumas mokiniams paaiškinamas tuo, kad čia visada reikia **interpretuoti** (įvardyti visų baigčių aibę ir ja remiantis sudaryti palankių baigčių aibę) bei **pastebėti (tam tikrą tvarką ar dėsningumą** visų ar palankių baigčių aibėje, kad būtų nustatytas aibės elementų skaičius). Kaip tik reikia to, ką abiturientai moka prasčiau ir kitų tipų uždaviniuose – kad ir geometriniuose, kuriuos sprendžiant reikia pasitelkti vaizduotę, suvokti brėžinį, kai ką jame pastebėti ir neretai pereiti nuo geometrinių vaizdinių prie algebrinių ar skaitinių sąryšių, prieš atliekant veiksmus.

Spręsdami 18 uždavinį, kandidatai turėjo pademonstruoti, kaip jie moka sudaryti nesudėtingos realios situacijos matematinį modelį (t. y. sudaryti tiesinių lygčių sistemą). Beveik pusė kandidatų su šia užduotimi susidorojo sėkmingai. Uždavinys yra geras, aiškus ir tinkamai suformuluotas. Geresnis rezultatas paaiškinamas tuo, kad tai iš esmės sveikos nuovokos uždavinys, jį suprasti padeda paveikslėliai, šalinantys galimą papildomą sunkesnį žingsnį – geometrinę sąlygos interpretaciją.

19 uždavinys – tai standartinė rodiklinė nelygybė, kurios sprendimas suvedamas į kvadratinės nelygybės sprendimą. Tai, kad uždavinys dvidalis (dviejų žingsnių), – vienintelė aplinkybė, daranti jį sunkesnį. Mūsų nuomone, tai nesunkus uždavinys, nors jį išsprendė tik 36 proc. kandidatų. Kyla klausimas, ar tiek kandidatų neišspręstų rodiklinės ir kvadratinės nelygybių, jei tai būtų atskiri uždaviniai.

Spręsdami 20 uždavinį, kandidatai turėjo parodyti, kad jie žino funkcijos kritinio taško sąvoką ir moka jo radimo algoritmą. Mūsų nuomone, sąlygoje buvo galima apsieiti be formuluotės „kritinių taškų suma“. Žiūrint formaliai, taškų suma mokykliniame matematikos kurse neapibrėžiama (kitaip nei skaičių suma). Tai daro formuluotę vengtiną (mokyklinės matematikos požiūriu), siekiant pedagoginio tikslo išlaikyti skirtumą tarp netapačių skaičiaus ir taško sąvokų.

Kita vertus, kalbant apie funkciją, matematikoje visą laiką remiamasi ryšiu tarp skaičiaus ir jį atitinkančio geometrinės tiesės taško. Tai leidžia vienu metu geriau operuoti tiek pačia funkcija, tiek jos geometrine interpretacija. Dėl to matematinei kalbai būdinga nepaisyti skirtumo tarp skaičių ir taškų (žinant, kad jie nėra tapatūs). Skaičiai vadinami taškais, nes gali būti *vaizduojami* geometriniais taškais. Įprotis naudotis šiuo stipriu sąvokų ryšiu, sprendžiant praktinius uždavinius, yra svarbesnis nei sąvokų skirtumo supratimas, šis įprotis neišvengiamai įgyjamas, išmokus spręsti analizės uždavinius. Todėl kandidatams neturėjo kilti problemų suvokiant, kad prašoma sudėti ne taškus, o juos atitinkančius skaičius, kuriais taškai apibūdinami (kritinis taškas užrašomas skaičiumi, kad ir kaip jis būtų apibrėžtas). Uždavinys kandidatams nebuvo labai sunkus, jį išsprendė apie 55 proc. kandidatų.

Šio uždavinio formuluotės problema kreipia dėmesį į tai, kaip mokykloje supažindinama su skaičių tiesės sąvoka. Ar mokyklinė matematika ne per dažnai aukoja matematinį griežtumą vien dėl apytikslio, intuityvaus kalbėjimo? Vien intuityvus kalbėjimas gali per daug radikaliai atskirti matematiką ir mokyklinę matematiką, dėl ko mokyklinėje matematikoje toliau tampa neįmanoma kalbėti apie tam tikrus matematinius dalykus. Domino principu viena negriežtai apibrėžta sąvoka ima blokuoti galimybę apibrėžti ir suprasti kitas idėjas.

21 – tai standartinis, tinkamai suformuluotas procentų uždavinys. Jis labai artimas 9 uždaviniui, panašus ir jį išsprendusiųjų skaičius – apie 50 proc. Lengvesni skaičiavimai, bet kiek sudėtingesnė situacija, kitoks žinomų ir ieškomo dydžių ryšys, kai ieškomą dydį verta pasižymėti raide, nebuvo per didelė kliūtis pusei kandidatų. Kaip teigiamas rodiklis tai gali atrodyti tik šių metų užduoties rezultatų kontekste. Iš tiesų šis lengvas standartinis uždavinys itin skandalingai atskleidžia, kokie žemi, nepakankami šiemet buvo kandidatų pasiekimai.

22 uždavinyje aprašyta praktinė situacija slepia geometrinį uždavinį, kurį buvo galima spręsti tiek taikant kosinusų teoremą, tiek lygiašonio ir stačiojo trikampių savybes. Tačiau tik 37 proc. išsprendusiųjų rodo, kad didžioji dalis kandidatų nesugebėjo šio uždavinio išspręsti nė vienu būdu. Mūsų nuomone, kad fizikinio turinio uždavinio formuluotė būtų nepriekaištinga, reikėtų nurodyti, į ką nekreipiama dėmesio (šiuo atveju reikėjo parašyti, kad į strypo storį nekreipiama dėmesio).

Apibendrinant II egzamino dalies (trumpojo atsakymo) uždavinius, pažymėtina, kad jie buvo kiek sunkesni už testo uždavinius, tikrino įvairesnes žinių ir gebėjimų grupes. Bet vertinant tik atsakymus, šie uždaviniai neteikia išsamios informacijos apie tikrąją situaciją. Šį įspūdį dar labiau stiprina faktas, kad II dalies uždaviniai šiaip jau nebuvo vienaveiksmiai, bet kurio veiksmo metu padaryta klaida reiškė 0 balų už visą uždavinį. Ir šioje dalyje tikimybių teorijos bei geometrijos uždaviniai spręsti itin prastai. Vėl bent kiek geriau spręsti uždaviniai, kurie išsprendžiami atliekant įpročiu tapusius veiksmus, kai nereikia reflektuoti situacijos, gilintis, pastebėti ir pasirinkti.

III dalis

Šios dalies (atvirojo atsakymo) uždaviniai yra sunkesni ir pagal savo turinį, ir pagal surinktų taškų skaičių. Jie paprastai tikrina ne vieną gebėjimą.

23 – tai gerai suformuluotas struktūrinis uždavinys, tikrinantis trigonometrinių reiškinių pertvarkymo, jų reikšmių skaičiavimo, trigonometrinių lygčių sprendimo ir jų sprendinių užrašymo gebėjimus. Daugiausia kandidatų (51 proc.) teisingai išsprendė pirmąją uždavinio dalį, kurioje reikėjo apskaičiuoti trigonometrinio reiškinio reikšmę. Kadangi trigonometrinių funkcijų reikšmės pateiktos egzamino užduoties sąsiuvinyje, tai šį itin lengvą uždavinį turėjo atlikti daugiau kandidatų. Gerokai prasčiau spręstos kitos uždavinio dalys. Antrąją (trigonometrinio reiškinio reiškimas sandauga) ir trečiąją dalį (trigonometrinės lygties sprendimas) atliko atitinkamai vos 26,7 ir 19,8 proc. kandidatų. Tai rodo (kaip ir 10 užd.), kad trigonometrijos mokymui mokyklose turėtų būti skiriama daugiau dėmesio. Beje, prastai spręsti 10 ir 23.2 uždaviniai rodo, jog kandidatai negeba laisvai atlikti algebrinių pertvarkymų (juos reikia pasirinkti ne pagal įpročiu tapusį algoritmą, o pagal esamą situaciją, į kurią reikia įsigilinti). Jei tik pusė kandidatų sugebėjo rasti funkcijų reikšmes matematikos formulių sąraše ir įrašyti jas 23.1 dalyje, jei mažiau nei pusė 10 uždavinyje atliko teisingus pertvarkymus, nestebina, kad vos ketvirtadalis kandidatų 23.2 dalyje galėjo atlikti iš eilės du analogiškus, bet abiem atvejais sunkesnius veiksmus. Šio struktūrinio uždavinio dalys, nors nagrinėjama ta pati funkcija, gana skirtingos, iš esmės nepriklausomos.

24 uždavinys yra matematikos taikymo realiose situacijose pavyzdys. Jo sąlyga suformuluota korektiškai, nors vėl galėtų būti pastaba, į ką nereikia kreipti dėmesio. Pranašumu galima laikyti uždavinio iliustravimą dviem paveikslėliais, iš kurių pirmasis, nematematinis, apeliuoja į realią situaciją, o antrasis interpretuoja pirmąjį paveikslėlį matematiškai. Juk tą patį turi atlikti pats sprendžiantysis matematizuodamas žodinę sąlygą. Pirmojoje uždavinio dalyje kandidatai turėjo gebėti pritaikyti rutulio ir ritinio tūrių formules, o antrojoje dalyje pademonstruoti, kaip geba taikyti išvestines ieškodami funkcijos didžiausios reikšmės. Uždavinį visiškai išsprendė 45 proc. (pirmąją dalį) ir 27 proc. (antrąją dalį) kandidatų. 24.1 dalis panašaus sunkumo kaip ir 23.1 tiek pagal turinį, tiek pagal rezultatus. 24.2 dalis gali būti lyginama su 13 uždaviniu (išvestinės taikymai, sąlygoje išvestinė nepaminėta), panašus ir jų sunkumas pagal rezultatus. Antroji uždavinio dalis remiasi pirmąja, kuri jai būtina, tad čia jos sudaro vieno uždavinio visumą, dalių sprendimai nepriklausomi.

25 – tai standartinis uždavinys, abi jo dalys iš esmės yra trumpos sąlygos uždaviniai, kurie tikrina logaritminės funkcijos apibrėžimo srities radimo, kvadratinių ir logaritminių nelygybių sprendimo gebėjimus. 25.1 dalis itin elementari. Tereikia žinoti logaritmo apibrėžimo sritį ir išspręsti kvadratinę nelygybę. Kad ją išsprendė tik 43,5 proc. laikiusiųjų, turi kelti didelį susirūpinimą. 25.2 dalis gali būti lyginama su 19 uždaviniu, ji kandidatams buvo dar sunkesnė nei 19 uždavinys (visiškai išsprendė 12,3 proc.). Tai iš dalies paaiškinama tuo, kad logaritmas sunkiau įkandamas nei rodiklinė funkcija. Tačiau tai rodo ne šio uždavinio per didelį sunkumą, bet dideles kandidatų žinių ir gebėjimų šia tematika spragas.

26 uždavinys yra gerokai sudėtingesnis, jis tikrina, kaip mokiniai supranta išvestinės geometrinę prasmę, žino tiesės kampinio koeficiento prasmę, moka taikyti integralinį skaičiavimą ieškodami

figūros ploto. Mūsų nuomone, uždavinio sąlyga suformuluota tinkamai, yra ją paaiškinantis brėžinys. Manome, kad kandidatų neturėjo klaidinti ir tas faktas, kad funkcijos grafikas, liestinė *AB* ir *Oy* ašis riboja dvi plokštumos sritis. Apie kurią sritį kalbama, matyti brėžinyje, be to, tik vienai iš sričių tinka standartinis žymėjimas *ABO*.

Pirmąją ir antrąją uždavinio dalis, kuriose reikėjo pademonstruoti išvestinių geometrinės interpretacijos žinias, visiškai išsprendė po 22,6 proc. kandidatų. Antroji dalis lengva, bet ją mažai kas išsprendė, nes jos sprendimas remiasi pirmosios dalies rezultatu. Tokio struktūrinio uždavinio dalių ryšio rekomenduojame vengti – neaišku, kodėl šiuo atveju dalys turėtų būti atskirtos.

Trečiąją dalį, taip pat lengvą – tereikėjo rasti tiesės ir *Oy* ašies sankirtos taško koordinates, išsprendė daugiau kandidatų (apie 40 proc.). Panašaus turinio ir sunkumo pagal turinį 12 uždavinys spręstas daug geriau (60 proc.). To priežastys gali būti ne tik psichologinės (nuovargis), bet ir kandidatų negebėjimas atskirti lengvo uždavinio, esančio užduoties III dalyje, susiorientuoti ir pastebėti, kad jie gali pasinaudoti informacija, esančia 26.2 dalies sąlygoje, t. y. negebėjimas orientuotis, kai bendras informacijos kiekis gana didelis ir reikia priimti savarankišką sprendimą, kuria jos dalimi pasinaudoti.

Paskutinę – sunkiausią – dalį, kurioje reikėjo pademonstruoti integralinio skaičiavimo gebėjimus, išsprendė tik 13,6 proc. kandidatų. Net 80 proc. kandidatų už ją negavo nė vieno taško, t. y. teisingai neužrašė nė vieno integralo, nekalbant apie jų skaičiavimą.

27 uždavinys turėjo atsakyti į klausimą, kaip kandidatai įsisavino aritmetinės bei geometrinės progresijų sąvokas, jų požymius, bendrojo nario formules ir laisvai moka taikyti jas ne standartinėmis situacijomis, taip pat kaip kandidatai moka spręsti lygčių sistemas. Nors uždavinys ir nėra sunkus, suformuluotas tinkamai, bet visiškai jį išsprendė tik 9,6 proc. kandidatų. Tai bent iš dalies paaiškina minėtas situacijos nestandartiškumas, reiškiantis, kad uždavinyje nepakanka vien tiesmukai atlikti įprastus veiksmus, ką buvo galima padaryti 14 uždavinyje apie progresiją. Vis dėlto uždavinio situacija nėra sudėtinga ir gauti bent 1 tašką už dvi iš lygčių neturėjo būti sunku. Kad 60 proc. laikiusiųjų gavo 0 taškų, gali reikšti, jog daug kandidatų šio uždavinio nė nesiėmė spręsti.

28 uždavinys iš tradicinės mokyklinės tematikos – vektorių. Jis nėra sunkus, bet sąlyga kiek neįprasta: lygiagretainio kraštinių vektorius reikia išreikšti kitais vektoriais (paprastai būna atvirkščiai; kai kraštinių vektoriai yra baziniai, tada uždavinį galima spręsti visai tiesmukai). Kandidatams uždavinys buvo per sunkus, nes visiškai jį išsprendė tik 4,2 proc. kandidatų. Atkreipkime dėmesį, kad ir visiškai standartinį 16 uždavinį apie vektorius kandidatai sprendė labai prastai.

29 uždavinys tikrina, kaip kandidatai supranta trikampių panašumą ir Talio teoremą. Tai vienintelis uždavinys, tikrinantis, kaip kandidatai geba įrodinėti matematinius faktus. Uždavinys yra tinkamas, suformuluotas korektiškai, bet nedidelis jį visiškai išsprendusiųjų skaičius (tik 4,2 proc.) rodo, kad įrodymų gebėjimams vidurinės mokyklos kurse reikėtų skirti daugiau dėmesio. Be to, tai dar vienas prastai spręstas geometrijos uždavinys.

30 – tai dar vienas prastai spręstas tikimybių teorijos ir kombinatorikos žinias ir gebėjimus tikrinantis uždavinys. Matematine prasme jo formuluotė yra korektiška ir aiški. Šį uždavinį visiškai išsprendė tik 4,2 proc. kandidatų. Pagal turinį uždavinys yra standartinis, sunkesnį jį daro tik sprendimo ilgumas, didesnio techninio darbo, norint gauti rezultatą, būtinybė. Nors tai nedidina uždavinio sunkumo pagal turinį, daugybėje kitų uždavinių mūsų jau pastebėta tendencija taip pat galėjo smukdyti šio uždavinio sprendimo rezultatus: kandidatams galėjo būti sunku rasti palankių baigčių skaičių, nes jam rasti nepakanka vien atlikti įprastus veiksmus, o reikia pastebėti baigčių aibės struktūros dėsningumą ir pagal tai priimti sprendimą išskirti 3 atvejus.

Taigi trečiosios dalies uždaviniai buvo sunkesni ir kandidatai už juos gavo mažiau taškų (nors struktūriniai uždaviniai turėjo ir visai lengvų dalių). Mūsų manymu, paskutinių uždavinių (26–30) blogus rezultatus lėmė ne tik tai, kad šie uždaviniai sunkesni už ankstesnius, bet ir tai, kad kandidatams paprasčiausiai trūko laiko. Tendencijos vėl pasikartoja: kandidatai bent kiek geriau sprendžia tik pačius tiesmukiausius sprendimus turinčius uždavinius, prasčiau išmano kai kurias temas (stochastika, geometrija, vektoriai, rodiklinės ir logaritminės nelygybės – net lengvesnius tų temų uždavinius kandidatai sprendė prasčiau nei kitus lengvesnius uždavinius; gana prastai spręsti ir trigonometriniai uždaviniai). Nepaisant to, pagal turinį labai sunkių uždavinių (pvz., kur trikdančiai sudėtingoje pradinėje situacijoje reikėtų rasti nestandartinį sprendimą) egzamino užduotyje nebuvo.

Remiantis mūsų klasifikacija, šių metų egzamino užduotyje buvo tik 4 sunkūs uždaviniai (26.4, 28, 29, 30), t. y. iš viso 10,8 proc. visų uždavinių. Už sunkius uždavinius buvo galima gauti 15 taškų (21,7 proc. bendro taškų skaičiaus). Be to, atkreiptinas dėmesys, kad visiškai paskutinius tris uždavinius išsprendė tik apie 4 proc. kandidatų, o daugiau kaip 70 proc. kandidatų už juos negavo nė vieno taško. Labai lengvų uždavinių buvo tik du (1 ir 4). Mūsų nuomone, uždaviniai 26.4, 29, 30, iš dalies 28 ir pagal turinį gali būti priskirti prie sunkių. Pagal šį kriterijų labai lengvi, be 1 ir 4, dar yra 3, 5, 10, bet kandidatai juos sprendė prasčiau. Uždavinių sunkumas pagal rezultatus auga: I dalyje 10 iš 12 uždavinių kandidatams buvo lengvi arba labai lengvi; II dalyje – 7 iš 10 uždavinių vidutinio sunkumo; III dalyje – 4 iš 8 uždavinių sunkūs arba turi sunkią dalį, kiti turi vidutinio sunkumo dalių, kurių sunkumas apskritai didesnis nei II dalies uždavinių.

Šie pastebėjimai rodo, kad kai kuriuos uždavinius būtų galima vertinti didesniu skaičiumi taškų. Užduoties bendras taškų skaičius padidėtų, o apimtis liktų tokia pati ar net sumažėtų. Mūsų manymu, tokie pirmosios dalies uždaviniai kaip 2, 8, 10 yra verti daugiau nei vieno taško, nes vertinant jų sprendimą galima skirti po tašką už atskiras teisingai atliktas operacijas. Antrosios dalies 14, 15, 16, 20, 22 uždavinių teisingas sprendimas galėtų būti vertinamas daugiau nei 2 taškais, nes šių uždavinių sprendimą galima išskaidyti į daugiau nei dviejų standartinių procedūrų atlikimą.

Taigi egzamine buvo įvairaus sunkumo uždavinių, ir lengvų, ir sunkesnių, be to, tokių, kuriuos kandidatai galėjo išspręsti remdamiesi ne per paskutinius porą metų, bet dar anksčiau įgytomis žiniomis ir gebėjimais. Tai liudija, kad egzaminas kandidatams nebuvo per sunkus, bet jis atskyrė kandidatus pagal jų pasiekimų lygį. Kai kurių uždavinių sunkumas pagal rezultatus ir pagal turinį nesutapo, t. y. kandidatai sprendė juos prasčiau nei turėtų. Paskutinio pusmečio pažymio ir egzamino įvertinimo koreliacija kandidatams, matematikos besimokiusiems pagal išplėstinio kurso programą, kiek didesnė už 0,7. Tokią koreliaciją galima laikyti stipria, t. y. abiturientų vertinimas mokykloje patvirtina egzamino vertinimą kaip objektyvų ir atitinkantį ugdymo programą. Žinoma, pagal bendrojo kurso programą besimokiusiųjų pažymio ir egzamino įvertinimo koreliacija gerokai mažesnė. Pagal bendrojo kurso programą mokęsi abiturientai sudarė apie 10 proc. kandidatų.

Visų uždavinių formuluotės turėjo būti aiškios kandidatams, jos iš esmės korektiškos, nedviprasmiškos, be matematinių klaidų ir parašytos tvarkinga matematine kalba, kuri turėtų būti įprasta mokyklą baigusiam jaunimui. Kelios pastabos dėl konkrečių uždavinių (pvz., fizikinio turinio uždavinyje galima paminėti, į ką galima neatsižvelgti; tą patį reiškinį sąlygoje stengtis vadinti tuo pačiu vardu, nes taip psichologiškai lengviau įsigilinti į sąlygą), kurias išsakėme, gali tapti dingstimi tobulinti uždavinių formuluotes, bet jos jokiais būdais nereiškia, kad uždaviniai buvo suformuluoti prastai, kad galėjo būti nesuprasti. Dar kiti priekaištai, išsakyti viešojoje erdvėje dėl formuluočių, susiję su tuo, kaip matematine kalba perteikti mokiniams kai kurias idėjas (matematinis objektas turi būti įvardijamas vienareikšmiškai; skaičiaus ir taško sąvokos nėra tapačios). Iš tiesų svarbu, kad šios idėjos būtų diegiamos mokykloje. Tačiau egzamino užduotis tokio pedagoginio tikslo neturi, atitinkamos uždavinių sąlygos nebuvo dviprasmiškos.

Išanalizavę uždavinius matome, kad matematikos valstybinio brandos egzamino uždaviniai skirti įvertinti kandidatų žinias bei gebėjimus, nurodytus Vidurinio ugdymo bendrosiose programose (kaip ir Matematikos brandos egzamino programoje): aritmetinė ir geometrinė progresija, racionalieji ir iracionalieji reiškiniai, logaritmai ir jų savybės, įvairūs kvadratinių lygčių sprendimo būdai, lygčių sprendimas (nežinomojo keitimas, pertvarkymas į $f(x)\cdot g(x) = 0$ pavidalą), tiesinių lygčių sistemos, lygčių sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, kita – kvadratinė, lygčių ir nelygybių ekvivalentumo samprata, racionaliosios nelygybės, paprasčiausios trigonometrinės tapatybės, rodiklinės bei logaritminės lygtys ir nelygybės, nesudėtingos trigonometrinės lygtys (taikant dvigubo argumento formules, suvedant į kvadratines lygtis, išskaidant dauginamaisiais), funkcijos išvestinės sąvoka, geometrinė ir fizikinė funkcijos išvestinės prasmė, funkcijų x^n (n – realusis skaičius), sin x, cos x, išvestinės, funkcijos išvestinės taikymas, ekstremumo taškai, kritiniai taškai, pirmykštės funkcijos sąvoka, pirmykštės funkcijos, išreikštos daugianariais, radimo taisyklės, apibrėžtinio integralo samprata, Niutono ir Leibnico formulės taikymas apibrėžtiniam integralui skaičiuoti, apibrėžtinio integralo taikymas (kreivinių figūrų plotų skaičiavimas), lygiagrečių tiesių savybės, panašiosios figūros, Talio teorema, smailiojo kampo trigonometrinės funkcijos, trikampio kampų ir kraštinių sąryšiai, erdviniai kūnai, jų tūriai ir paviršių plotai, vektoriaus sąvoka plokštumoje ir erdvėje, vektoriaus reiškimas koordinatėmis, vektorių sudėtis ir atimtis, daugyba iš skaičiaus, vektorių skaliarinė sandauga, kampas tarp vektorių, deriniai, derinių skaičius, klasikinis tikimybės apibrėžimas, nepriklausomi įvykiai, imties skaitinių charakteristikų skaičiavimas.

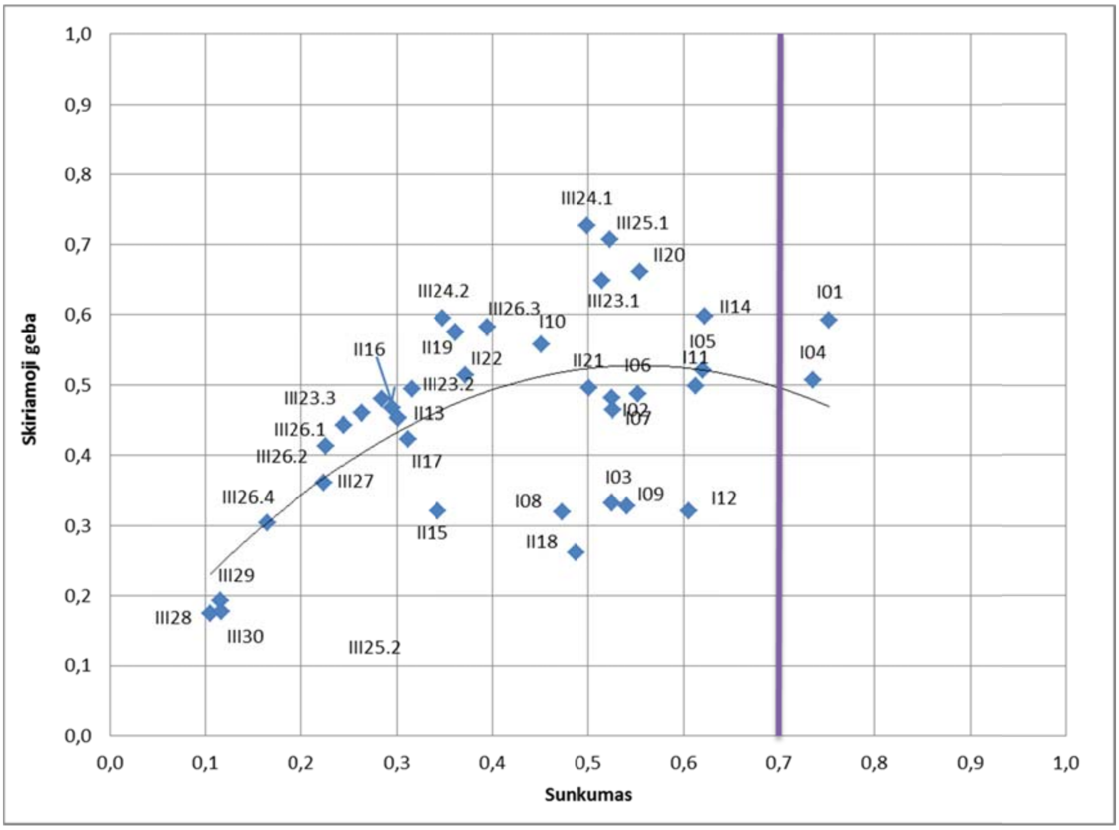
Mūsų manymu, nėra gerai, kad į valstybinio matematikos egzamino užduotį neįtrauktos arba per mažai atskleistos tokios svarbios matematikos turinio dalys, kaip racionalieji ir iracionalieji reiškiniai, modulio sąvoka, lygtys ir nelygybės su moduliu, racionaliosios ir iracionaliosios nelygybės, nelygybių sistemos, dviejų kampų sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos, įbrėžtiniai ir centriniai kampai, įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai, trikampio pusiaukampinių savybės, tiesės ir plokštumos erdvėje, tiesių tarpusavio padėtis, susikertančiosios, lygiagrečiosios ir prasilenkiančiosios tiesės, kampai tarp tiesių, statmenosios tiesės, plokštumų tarpusavio padėtis; susikertančiosios ir lygiagrečiosios plokštumos, dvisieniai kampai, statmenosios plokštumos, tiesės ir plokštumos statmenumo požymis, trijų statmenų teorema. Dalį šių temų būtų galima įtraukti į egzamino užduotį, nedidinant jos apimties, o atsisakant artimos tematikos uždavinių (pvz., šiemet buvo net trys kvadratinių lygčių / nelygybių uždaviniai, du analogiški procentų uždaviniai, įkyriai kartojosi daugianario išvestinės skaičiavimas, kai kitokios funkcijos išvestinės prireikė vieninteliame 1 taško vertės uždavinyje).

Apskritai egzamino užduotis apima visas keturias didžiąsias matematikos programos sritis (skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai, lygtys, nelygybės ir jų sistemos; geometrija; funkcijos ir analizės pradmenys; kombinatorika, tikimybės ir statistika) ir kiekvienos srities kandidatų pasiekimai tikrinami gana įvairiais uždaviniais.

3. Uždavinių, užduoties rengėjų priskirtų prie atitinkančių minimalius reikalavimus, analizė

Pagal matematikos užduoties rengėjus, iš uždavinių priskirtų prie atitinkančių minimalius reikalavimus, 2014 metų matematikos egzamine kandidatai galėjo surinkti 20 proc. visų galimų taškų (t. y. 14 taškų iš 69 galimų). Pagal programos reikalavimus pakaktų ir 16 proc. tokių taškų (apie11 taškų), tad rengėjų siūlomas taškų skaičius buvo net didesnis.

Pagal susitarimą, minimalius reikalavimus atitinkančius uždavinius turėtų teisingai išspręsti daugiau nei 70 proc. egzaminą laikiusių kandidatų (arba tokių uždavinių sunkumas turėtų būti didesnis nei 0,7), tačiau 2014 metų rezultatų statistika rodo, kad tik du vienu tašku vertinami pasirenkamojo atsakymo uždaviniai atitiko tokį reikalavimą (1 ir 4). Kad egzamine buvo įvairaus sunkumo uždavinių, tačiau trūko tik minimalius reikalavimus atitinkančių, rodo ir 2014 metų matematikos valstybinio brandos egzamino rezultatų statistinės analizės 2 diagrama:



Todėl toliau detaliau aptarsime matematikos užduoties visų struktūrinių dalių uždavinių (ar jų dalių), užduoties rengėjų priskirtų prie atitinkančių minimalius egzamino reikalavimus, atitiktį egzamino programos minimaliems reikalavimams. Ieškosime priežasčių (susijusių ne tik su uždavinių parinkimu, jų formuluočių korektiškumu, bet ir matematikos mokymo procesu mokyklose ar egzamino programa), kodėl daugumos šių uždavinių kandidatų sprendimo rezultatai buvo prastesni nei tikėtasi, pateiksime siūlymus, į ką reikėtų ateityje užduočių rengėjams atkreipti dėmesį parenkant minimalius reikalavimus atitinkančius matematikos užduoties uždavinius, kokios galėtų būti egzamino programos minimalios korekcijos.

Toliau lentelėse pateikiami uždaviniai (ar jų dalys), priskirti prie minimalius reikalavimus atitinkančių, jų sunkumas, o šalia – mūsų pastabos. Kai kurių lentelių apačioje pateikti pagal turinį ir tikrinamus gebėjimus panašūs ankstesnių metų uždaviniai, jų sunkumas ir trumpi mūsų komentarai.

I dalis

Pagal užduoties rengėjus, pirmoje dalyje buvo trys (1, 3 ir 4) pasirenkamojo atsakymo uždaviniai (vertinami po vieną tašką), priskirti prie atitinkančių minimalius egzamino reikalavimus, bet vienas iš jų (3) pagal mokinių sprendimo rezultatus neatitiko šio reikalavimo.

01. Kokia turi būti m reikšmė, kad taškas $A(0;1)$ priklausytų funkcijos $f(x)=(m-2)x+m-3$ grafikui?

A $m=1$
B $m=2$
C $m=3$
D $m=4$

Sunkumas – 0,75.

Šį uždavinį kandidatai sprendė, kaip ir tikėtasi, gerai – 75 proc. kandidatų jį išsprendė teisingai. Tačiau matematikos valstybinio brandos egzamino programoje minimaliuose reikalavimuose nėra aprašytas gebėjimas patikrinti, ar taškas priklauso funkcijos grafikui (toks reikalavimas yra apibrėžtas pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinimo programoje, kaip ir uždavinyje pateikta tiesinė fukcija – pagrindinės mokyklos kursas). Siūlome koreguoti brandos egzamino programoje minimalų reikalavimą 3.4:ne tik atpažinti, bet ir susieti funkcijų formules ir grafikus (eskizus).
Jei norime, kad tokį uždavinį teisingai spręstų dar daugiau kandidatų, reikėtų teikti įprastesne forma užrašytas funkcijas pvz.:
$f(x)=kx+6$, $f(x)=2x+b$, $f(x)=\frac{k}{x}$, $f(x)=a^x$ ir t. t.

Palyginimui pateikiame 2013 metų 11 uždavinį, kurio sprendimo rezultatas geresnis.

11. Taškas $\left(2;\frac{4}{9}\right)$ priklauso funkcijos $f(x)=a^x$ grafikui. Kokia yra a skaitinė reikšmė?

A 3 **B** $\frac{3}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{1}{3}$

Sunkumas – 0,88.

03. Lentelėje pateikti duomenys apie vienos klasės mokinių miego trukmę.

Miego valandų skaičius	6	7	8	9	10	11
Mokinių skaičius	3	5	7	11	2	1

Šios imties mediana lygi:

A 12 **B** 9 **C** 8,5 **D** 8

Sunkumas – 0,52.

Šio uždavinio reikalavimas – apskaičiuoti imties medianą – aiškiai apibrėžtas egzamino programoje ir priskirtas prie minimalių reikalavimų (4.5). Tačiau prastas tokio standartinio ir lengvo pagal turinį ir gebėjimus uždavinio sprendimo rezultatas – teisingai jį išsprendė tik 52 proc. kandidatų – rodo, kad stochastikos temai (ar kartojimui) mokykloje buvo skiriama per mažai dėmesio.
28 proc. kandidatų, pasirinkusių neteisingą atsakymą **C***, tam tikrą supratimą apie medianą turi, bet ne visišką – nekreipia dėmesio į miego valandų dažnį. Matyt, jei uždavinyje imtis būtų pateikta variacine eilute, medianą teisingai apskaičiuotų apie 80 proc. kandidatų.*
16,9 proc. pasirinkusiųjų neteisingą atsakymą **B** *greičiausiai painioja modos ir medianos sąvokas, kurių prasmę reikėtų prisiminti pasirinkus matematikos egzaminą.*

Žemiau pateikiame ankstesnių metų tokios temos dviejų uždavinių sprendimo rezultatų apžvalgą.

2011 metai

3. Dainų konkurse atlikėjai buvo vertinami balais. Norint patekti į kitą etapą, reikėjo surinkti nuo 37 iki 40 balų. Lentelėje surašyta, kiek dalyvių, praėjusių atranką, įvykdė šį reikalavimą.

Balai	37	38	39	40
Dalyvių skaičius	6	7	5	4

Kaip apskaičiuoti, kiek vidutiniškai balų surinko atranką praėjęs dalyvis?

A $\frac{37+38+39+40}{4}$

B $\frac{37\cdot6+38\cdot7+39\cdot5+40\cdot4}{22}$

C $\frac{37+38+39+40+6+7+5+4}{8}$

D $\frac{37\cdot6+38\cdot7+39\cdot5+40\cdot4}{4}$

E $\frac{37+38+39+40}{22}$

Sunkumas – 0,8.

Šio uždavinio geresnius sprendimo rezultatus galėjo lemti ir tai, kad ankstesniuose matematikos egzaminuose dažniausiai buvo tikrinami kandidatų imties vidurkio ir dispersijos skaičiavimo bei taikymo gebėjimai. Todėl dauguma mokinių (o gal ir mokytojų) labiau tikisi ir mokymosi procese daugiau dėmesio skiria tokio tipo uždavinių sprendimui.

2013 metai

Egzamino užduotyje buvo gebėjimų prasme sunkesnis nei 2014 metų statistikos temos uždavinys, kurį sprendžiant vartojamos modos, vidurkio ir medianos sąvokos, bet jo rezultatai geresni nei 2014 metais.

3.Yra 5 bandomieji sklypai. Kiekviename iš jų pasodinta po 100 pupų. Po nustatyto laiko sklypuose sudygo atitinkamai 72, 82, 86, 80 ir x pupų. Žinoma, kad sudygusių pupų skaičių moda, mediana ir vidurkis sutampa. Raskite nežinomą pupų skaičių x.

A 86 **B** 84 **C** 82 **D** 80 **E** 72

Sunkumas – 0,69.

Šio uždavinio teisingo atsakymo pasirinkimo nelemia medianos sąvokos išmanymas, pakanka teisingai taikyti tik modą ir vidurkį(medianos reikšmė galėtų būti panaudota tik teisingo atsakymo „kontrolei“).

04. Skaičių tiesėje pažymėti skaičiai *a* ir *b*.  Kuris iš žemiau užrašytų teiginių yra teisingas? **A** $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ **B** $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$ **C** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<1$ **D** $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<1$ **Sunkumas – 0,74.**	*Gana geras, kaip ir tikėtasi, šio uždavinio sprendimo rezultatas – jį teisingai išsprendė 74 proc. kandidatų. Matematikos valstybinio brandos egzamino programoje minimaliuose reikalavimuose nėra apibrėžtas realiųjų skaičių palyginimo, skaičių vaizdavimo skaičių tiesėje gebėjimas (šis reikalavimas yra apibrėžtas pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinimo programoje). Uždavinys atitinka minimalius reikalavimus, nes kandidatas gali teisingą atsakymą gauti pasinaudojęs skaičiuotuvu (mokyklose, ypač dirbant su mokiniais, kurie matematiką mokosi pagal bendrojo kurso programą, reikėtų daugiau dėmesio skirti darbui su skaičiuotuvu).*

II dalis

Matematikos užduoties rengėjai minimaliam pasiekimų lygiui iš egzamino užduoties II dalies uždavinių, kurių vertinamas tik galutinis neteisingas / teisingas atsakymas (0 arba 2 taškais) priskyrė tris uždavinius (20, 21 ir 22), už kurių teisingus atsakymus kandidatai galėjo gauti 6 taškus. Tačiau nė vieno iš šių uždavinių sprendimo rezultatai nebuvo tokie, kokių tikėtasi (kad juos teisingai išspręs daugiau nei 70 proc. kandidatų). Toliau pateiksime kiekvieno uždavinio įvertinimą, tik prieš tai aptarsime (kad nesikartotume), kodėl šių uždavinių sprendimo rezultatai buvo prastesni nei tikėtasi.

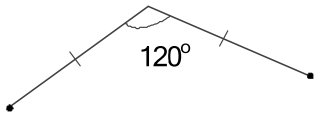
1) Šie minimaliam mokinių pasiekimų lygiui priskirti uždaviniai buvo paskutiniai iš dešimties II dalies uždavinių. Šių uždavinių formuluotės nebuvo visiškai įprastos, reikalavo susikaupimo ir atidumo, todėl kandidatų nuovargis, prieš tai išsprendus jau 19 uždavinių, galėjo atsiliepti jų sprendimo rezultatams.
2) Šių uždavinių kandidatų sprendimo rezultatai tikriausiai būtų buvę geresni, jei būtų vertinamas ne tik atsakymas, bet ir jų sprendimas (padaręs elementarią aritmetinę klaidą, kandidatas neturėjo galimybės gauti vieno taško). Uždavinio sprendimo vertinimas suteiktų daugiau informacijos apie problemas, kilusias sprendžiant šiuos uždavinius (ar tai kandidatų išsiblaškymas, ar kažkokios temos nesupratimas, ar teksto suvokimo problemos ir pan.).

20. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ kritinių taškų sumą. **Sunkumas – 0,55.**	*Tinkamas egzamino programos 3.12 minimalų reikalavimą atitinkantis uždavinys, tačiau teisingai išspręstas tik 55 proc. egzaminą laikiusių kandidatų.* *Problema – formuluotė „kritinių taškų suma“. Kandidatai galėjo nesuprasti, ką reiškia „sudėti taškus“.* *Tikintis geresnio tokio uždavinio sprendimo rezultato, reikėtų jį formuluoti taip:* Raskite funkcijos $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ kritinius taškus. *arba* Raskite funkcijos $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ grafiko kritinių taškų x koordinates.

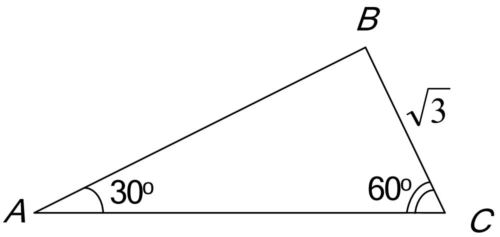
<table>
<tr>
<td>21. Automobilio greitis 25 proc. didesnis už motociklo greitį. Apskaičiuokite motociklo greitį, jei automobilio greitis yra 85 km/h.

Sunkumas – 0,501.</td>
<td><i>Iš pažiūros įprastas, lengvas, pagrindinės mokyklos kursą atitinkantis uždavinys, bet jį išsprendė tik apie 50 proc. egzaminą laikiusių kandidatų.</i>
<i>Viena iš priežasčių, kodėl toks prastas standartinio procentų skaičiavimo uždavinio sprendimo rezultatas, gali būti prasti mokinių teksto suvokimo gebėjimai, neįsigilinimas į sąlygą, skubėjimas (pvz., kandidatai galėjo painioti, kuris dydis atitinka 100 proc., o kuris 125 proc.).</i></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><i>Palyginimui pateikiame 2012 metų egzamino užduoties II dalies 19 uždavinį, kurio sprendimo rezultatai tais metais buvo labai geri.</i>
19. Lagamino kaina 300 Lt. Kiek procentų šią kainą reikėtų sumažinti, kad nauja lagamino kaina būtų 282 Lt?

Sunkumas – 0,95.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>22. Metalinį 2 m ilgio strypą sulenkė tiksliai per vidurį taip, kad tarp strypo dalių susidarė 120° kampas. Koks atstumas tarp sulenkto strypo galų? Atsakymą suapvalinkite iki centimetrų. <i>Pastaba.</i> $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$.


Sunkumas – 0,37.</td>
<td><i>Šiuo uždaviniu tikrinamas 2.4 punktu egzamino programoje apibrėžtas minimalus reikalavimas – gebėti taikyti kosinusų teoremą. Tačiau šiuo uždaviniu dar tikrinamas ir matavimo vienetų sąryšių žinojimas bei skaičių apvalinimo gebėjimai. Šis uždavinys reikalauja susikaupimo, pastabumo, o tai juk paskutinis II dalies uždavinys.</i>
<i>Visa tai, kas aukščiau išvardyta, ir galėjo lemti itin prastą šio uždavinio sprendimo rezultatą (teisingai jį išsprendė tik 37 proc. kandidatų).</i></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><i>Palyginimui pateikiame 2012 metų egzamino užduoties II dalies tokį pat gebėjimą tikrinantį uždavinį, kurį tais metais išsprendė 61 proc. egzaminą laikiusių kandidatų.</i>

17. Trikampio ABC kraštinės BC ilgis $\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, o $\angle C = 60^\circ$. Apskaičiuokite kraštinės AB ilgį.


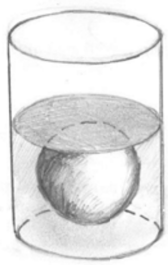
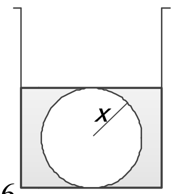
Sunkumas – 0,61.

<i>Kaip matome, labai paprasta ir aiški uždavinio formuluotė, standartinis sinusų teoremos arba stačiojo trikampio (jei kandidatas tai pastebi) savybių taikymas, šio uždavinio vieta II dalyje (tai buvo trečiasis antrosios dalies uždavinys) lėmė geresnį, bet ne tokį, kokio tikimės iš minimalųjį lygį atitinkančio uždavinio, rezultatą. Tai galėtų reikšti ne blogą geometrijos uždavinių parinkimą egzamino užduotyje, bet geometrijos dėstymo problemas mokykloje.</i></td>
</tr>
</table>

III dalis

Pagal egzamino užduoties rengėjus, III dalyje už minimalaus lygio pasiekimus buvo galima gauti 5 taškus (23.1 uždavinio taškas ir po vieną tašką iš daugiataškių 24.1, 25.1, 27 ir 30 uždavinių). Kadangi nėra aišku, kuris pagal užduoties rengėjus taškas iš dviejų, trijų, keturių ar penkių yra skirtas už minimalius pasiekimus, toliau darome prielaidą, kad tai pirmasis taškas aprašytas (apibrėžtas) vertinimo instrukcijoje. Deja, ir šiuos taškus surinko mažiau nei 70 proc. egzaminą laikiusių kandidatų.

23. Duota funkcija $f(x) = \sin x - \cos(2x)$. **23.1.** Apskaičiuokite $f(x)$ reikšmę, kai $x = \frac{\pi}{2}$. *(1 taškas)* **Sunkumas – 0,51.**	*Šiuo uždaviniu tikrinamas 1.30 punktu egzamino programoje apibrėžtas minimalus reikalavimas – gebėti apskaičiuoti skaičiuotuvu bet kokio kampo trigonometrinių funkcijų reikšmes. Tačiau kandidatų sprendimo rezultatai neatitiko lūkesčių – tik 51 proc. kandidatų atliko šį uždavinį teisingai. Paanalizuokime kodėl.* *Pagal bendrojo kurso programą besimokantys mokiniai neprivalo naudoti kampo, išreikšto radianais (tai apibrėžta bendrosiose vidurinio ugdymo matematikos programose arba tai galima suprasti atkreipus dėmesį į egzamino programos 1.28 reikalavimą tik* ***išplėstiniam kursui*** *– „Išreikti kampo didumą radianais, radianus keisti....“).* *Taigi norint, kad uždavinys atitiktų minimalius reikalavimus ir kad jį teisingai išspręstų didesnė dalis kandidatų – kampas turi būti pateiktas laipsniais, o egzamino programos 1.30 punktas, aiškumo dėlei, galėtų būti papildytas „...kampo, išreikšto laipsniais,..“.*

24. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo spindulys 6, įdėtas metalinis rutuliukas. Į indą įpilta tiek vandens, kad jo paviršius liečia rutuliuką.  **24.1.** Pažymėję rutuliuko spindulio ilgį *x*, įrodykite, kad taip įpilto į indą vandens tūris yra $V(x) = 72\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3,\ 0 < x < 6.$  *(2 taškai)* **Sunkumas – 0,50.**	*Pagal šio uždavinio vertinimo instrukciją, pirmasis taškas skiriamas už teisingą bent vienos (ritinio ar rutulio) tūrio formulės panaudojimą – tai būtų egzamino programos 2.7 minimalus reikalavimas. Kadangi pirmąjį tašką gavo 9,8 proc. kandidatų, o du už uždavinį skirtus taškus – 45 proc., tai pirmąjį tašką gavo 54,8 proc. egzaminą laikiusių kandidatų. Kandidatui nebuvo sunku gauti vieną tašką, nes egzamino užduoties formulyne yra pateikta rutulio tūrio formulė, o joje reikiamas dydis – rutulio spindulys – jau užduoties rengėjų pažymėtas uždavinyje x. Uždavinio statistika rodo, kad už jį 45,2 proc. kandidatų gavo 0 taškų. Tai reiškia, kad daugeliui tiek pagal bendrojo kurso programą, tiek pagal išplėstinio kurso programą besimokančių mokinių geometrija yra probleminė matematikos sritis.*

25. Duota funkcija $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+10).$ **25.1.** Nustatykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį. *(2 taškai)* **Sunkumas – 0,52.**	*Pagal šio uždavinio vertinimo instrukciją, pirmasis taškas skiriamas už žinojimą, kad logaritmo reiškinys turi būti teigiamas (šį tašką gavo 61,1 proc. kandidatų). Tačiau egzamino programoje yra tik du tokie minimalūs reikalavimai, susiję su šia tema: „1.7. Paprastais atvejais nustatyti racionaliojo reiškinio apibrėžimo sritį“ ir „3.5. Iš grafiko (eskizo) nustatyti funkcijos apibrėžimo / reikšmių sritį, ...“. Jie lyg ir neatitinka uždavinio reikalavimo.* *Mūsų manymu, šie du egzamino programos reikalavimai, susiję su apibrėžimo sritimi, yra nepakankami egzamino programoje apibrėžtam 1.27 minimaliam reikalavimui – „Spręsti ... paprasčiausias logaritmines nelygybes“. Juk spręsdamas paprasčiausią nelygybę, pvz.,* $\log_2 x<1$*, mokinys turi žinoti, kad* $x>0$. *Todėl reikalingos egzamino programos korekcijos ar nauji susitarimai.* *Be to, mokant matematikos pastebėta, kad pagal bendrojo kurso programą besimokantiems mokiniams apibrėžimo sritis yra sunkiai suvokiama sąvoka.*

27. Duoti keturi teigiami skaičiai. Pirmas, antras ir trečias skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, o šių skaičių suma lygi 12. Antras, trečias ir ketvirtas skaičiai sudaro geometrinę progresiją, jų suma lygi 19. Raskite šiuos keturis skaičius. *(4 taškai)* **Sunkumas – 0,22.**	*Pagal šio uždavinio vertinimo instrukciją, pirmasis taškas skiriamas už teisingą aritmetinės progresijos sumos išraišką ir aritmetinės progresijos savybių taikymą. Tačiau šias savybes reikia taikyti nestandartinėje, neįprastoje situacijoje ir todėl negalima tikėtis, kad silpnesnis kandidatas sugebės tai atlikti (mažai tikėtina, kad jis išvis bandys spręsti tokį uždavinį).*

30. Mokslo metų gale mokiniai paprastai organizuoja išvykas. Vieni klasės mokiniai norėtų išvykos į Druskininkus, kiti – į Birštoną. Ginčą išspręsti padėjo klasės auklėtojas – matematikos mokytojas, pasiūlęs tokį pasirinkimo būdą. Jis atnešė dėžę, kurioje yra 11 vienodų rutulių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ir paprašė šešių mokinių atsitiktinai ištraukti po rutulį iš dėžės ir padėti ant stalo. Jei ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginis skaičius, tai vykstama į Druskininkus, o jei lyginis – į Birštoną. Kokia tikimybė, kad klasė važiuos į Druskininkus? *(5 taškai)* **Sunkumas – 0,12.**	*Pagal šio uždavinio vertinimo instrukciją, pirmasis taškas skiriamas už teisingai apskaičiuotą visų galimų baigčių skaičių (t.y. keliais skirtingais būdais iš 11 rutulių galima ištraukti 6). Tačiau minimalus reikalavimas yra paprastais atvejais sudaryti bandymo baigčių aibę (4.1) – šiuo atveju bandymo baigčių skaičius per didelis, kad silpnesnis kandidatas gebėtų išrašyti baigtis. Juo labiau – derinių formules privalo žinoti ir mokėti taikyti tik pagal išplėstinio kurso programą besimokantys mokiniai.* *Mažai tikėtina, kad silpnesnis kandidatas net pradės spręsti paskutinį probleminį uždavinį.*

Remdamiesi mūsų padaryta atskirų uždavinių analize (vertinimu), apibendrinsime, **kodėl tik tokia maža dalis kandidatų atliko uždavinius (jų dalis), 2014 metų užduoties rengėjų priskirtus prie atitinkančių minimalius reikalavimus.**

1. Egzamino užduoties I dalyje buvo trys uždaviniai (1, 3 ir 4), priskirti prie atitinkančių minimalius egzamino išlaikymo reikalavimus.

Egzamino užduoties II dalyje buvo irgi trys minimalius reikalavimus atitinkantys uždaviniai (20, 21, 22), bet jie buvo šios dalies pabaigoje. Kadangi šių uždavinių formuluotės nebuvo visiškai įprastos, reikalavo susikaupimo ir atidumo, tai kandidatų nuovargis, prieš tai sprendus 19 uždavinių, galėjo atsiliepti šių uždavinių sprendimo rezultatams.

Kaip jau minėjome, buvo tikėtasi, kad kandidatai gaus po tašką už egzamino užduoties III dalies 27 ir 30 uždavinius, tačiau tai nepasitvirtino. Pagal užduoties atlikimo rezultatų statistiką, paskutinių uždavinių nesprendė ne tik silpnesni kandidatai, bet ir dauguma egzaminą laikiusių kandidatų.

2. Spręsdamas 20 uždavinį kandidatas galėjo nesuprasti, ką reiškia „kritinių taškų suma“.

22 uždavinyje daug įvairios informacijos (reikia būti atidžiam ir nieko nepraleisti) ir tikrinami du dalykai – kosinusų teoremos taikymas bei skaičių apvalinimas.

23.1 uždavinyje reikėjo nurodyti kampo didumą laipsniais, o ne radianais (pagal bendrojo kurso programą besimokantys mokiniai, kampus matuoja laipsniais).

25.1 uždavinio vienas taškas, skirtas patikrinti minimalius pasiekimus, neatitinka programos reikalavimų turinio prasme (tačiau reikalingos tam tikros korekcijos egzamino programoje).

3. Daugiataškio uždavinio taškai buvo skirstomi (priskiriami) į bendrojo kurso ir išplėstinio kurso taškus. Pavyzdžiui, 27 ir 30 uždavinių po vieną iš keleto už uždavinį skiriamų taškų buvo priskiriami minimaliems reikalavimams, o kiti – reikalavimams pagal bendrojo kurso programą ir / arba reikalavimams pagal išplėstinio kurso programą. Buvo tikėtasi, kad po vieną minimaliems reikalavimams priskirtą tašką kandidatai gaus spręsdami matematinių taikymų 27 „abstraktų“ uždavinį ir paskutinį 30 probleminį uždavinį.

Ateityje, rengiant užduotį, reikėtų vengti tokio daugiataškio uždavinio taškų paskirstymo, nes, mūsų manymu, nerealu, kad silpnas kandidatas spręs arba pradės spręsti išplėstinio kurso, sudėtingus ir dar užduoties pabaigoje esančius uždavinius ir taip rinks papildomus taškus – tą patvirtina ir 2014 metų tokių uždavinių sprendimo rezultatų statistika.

4. Kaip jau minėjome, egzamino užduoties II dalies trys paskutiniai uždaviniai buvo priskirti prie minimalius egzamino išlaikymo reikalavimus atitinkančių. Kadangi šie klausimai vertinami 0 arba 2 taškais (t. y. vertinamas tik teisingas atsakymas, bet nevertinamas sprendimas), dauguma kandidatų neturėjo galimybės gauti bent po vieną tašką už teisingą uždavinio sprendimo strategijos pasirinkimą arba prarado abu taškus padarę paprastą aritmetinę klaidą.

5. 3 ir 24.1 uždaviniai atitiko egzamino programoje aprašytus minimalius reikalavimus, bet jų sprendimo rezultatai vis tiek buvo prastesni, nei tikėtasi. Tai tik patvirtina geometrijos ir stochastikos temų mokymo(si) problemas mokykloje.

4. Išvados ir rekomendacijos

Remiantis egzamino užduoties analize galima daryti tokias išvadas, visų pirma pagrindžiančias, kad ši užduotis yra **validi**.

1. Egzamino užduotis iš esmės atitinka Vidurinio ugdymo ir Matematikos brandos egzamino programas. Iš atliktos užduoties analizės išplaukia, kad buvo tikrinama, kaip kandidatai išmoko vidurinės mokyklos matematikos dalyko turinio pagrindinių sričių žinias bei įgijo vidurinio ugdymo programoje nurodytus gebėjimus. Tai, ko buvo reikalaujama užduotyje, kandidatai turėjo mokėti (pagal bendrojo kurso programą besimokę – iš dalies, o pagal išplėstinio kurso – viską). Kartu atkreipiame dėmesį į vieną taisytiną netikslumą, esantį pačioje brandos egzamino programoje (žr. 6 uždavinio analizę).

2. Egzamino užduotyje uždaviniai suformuluoti suprantamai kandidatams, užduoties sudarytojų pasirinktos formuluotės neturėjo neigiamai paveikti egzamino rezultatų. Kelių uždavinių formuluotes dar būtų galima pagerinti, bet su uždavinių aiškumu, suprantamumu kandidatams pagerinimai nebūtų susiję.

3. Egzamino užduotyje nėra per sunkaus turinio uždavinių, neatitinkančių to, ko iš užduoties būtų galima tikėtis. Užduotyje esama lengvų uždavinių, taip pat pagrindinės mokyklos kurso uždavinių. Pakako juos išspręsti ir egzaminas būtų išlaikytas mokant matematiką tik patenkinamai. Kandidatų, besimokiusių pagal išplėstinio kurso programą (o jie sudaro daugumą laikiusiųjų), paskutinio pusmečio mokykloje pažymio ir egzamino įvertinimo koreliacija yra stipri. Užduotyje yra ir sunkesnių uždavinių, tikrinusių aukštesnius kandidatų gebėjimus ir taip diferencijavusių geriau ir prasčiau matematiką mokančius kandidatus.

4. Egzaminu buvo patikrinta pakankama žinių ir gebėjimų įvairovė, todėl egzamino rezultatus būtų galima laikyti reprezentatyviais visos egzamino programos požiūriu, nors kai kurios matematikos temos kartojosi, praleistos kitos, kurių apskritai nederėtų pamiršti, nederėtų išguiti iš brandos egzaminų.

5. Kai kuriuos uždavinius kandidatai sprendė prasčiau, nei buvo galima tikėtis žinant tų uždavinių turinį. Ryški tendencija – prastai spręsti geometrijos, vektorių, tikimybių teorijos ir statistikos uždaviniai. Tai rodo ne prastą uždavinių parinkimą (prasčiau nei kitų temų spręsti ir lengvesni, ir sunkesni šių temų uždaviniai, įskaitant lengviausius ir visiškai standartinius), bet problemas šių temų mokant mokykloje. Egzaminas tik objektyviai šias problemas atskleidė.

6. Taip pat pastebima tendencija, kad kandidatai prasčiau sprendė tuos uždavinius, kuriuose reikėjo įsigilinti į matematinę situaciją, nesudėtingoje situacijoje pastebėti kokį nors dėsningumą, susikaupti, pademonstruoti dėmesingumą, gyvesnį santykį su matematika. Lengviau spręsti tie uždaviniai, kuriuose pakako aklai, nesusimąstant pritaikyti įsimintą, mokykloje įpročiu paverstą algoritmą. Tai gali būti susiję ir su šiuolaikinio žmogaus didėjančiu išsiblaškymu, nedėmesingumu dėl jį užplūstančio naudingos ir nenaudingos informacijos srauto. Kita vertus, tai susiję su mokyklinio mokymo problemomis, atspindinčiomis bendrą situaciją. Nemanome, kad gyvesnio santykio reikalaujantys uždaviniai yra laikytini savo turiniu sudėtingesniais, nes gyvesnis santykis, dėmesingumas ir matematinis reiklumas turėtų būti norma, diegiama mokiniams mokykloje. Tai kaip tik yra egzamino vertinimo prielaidose mūsų įvardyta gilesnė matematinės kompetencijos prasmė. Taigi egzaminas bent iš dalies parodė (per tai, kaip buvo spręsti atskiri uždaviniai), kokių matematinės kompetencijos problemų turi nemaža dalis rašiusiųjų, ir tai įvertino.

Darytina galutinė išvada, kad užduotis egzaminu patikrinti ir įvertinti kandidatų pasiekimus iš esmės atlikta tinkamai, dalykinis egzamino turinys tam neturėjo būti kliūtis. Tačiau egzaminas išryškino kai kurias kandidatų matematinio pasirengimo problemas. Kadangi matematikos brandos egzaminas netrukus taps iš dalies privalomas, tai juo labiau reikėtų imtis spręsti šias problemas.

Rekomenduojame ateityje atsižvelgti į šiuos pasiūlymus.

1. Būsimieji egzamino užduoties rengėjai turėtų skirti daugiau dėmesio uždavinių formuluočių korektiškumui ir suprantamumui. Šiuo požiūriu egzamino užduotis turėtų būti nepriekaištinga, uždavinių formuluotės pavyzdinės. Visų pirma, jos turi būti parašytos abiturientams suprantama kalba, kreipiančios sprendžiančiojo dėmesį į uždavinio esmę. Minimaliam pasiekimų lygiui tikrinti priskirtų uždavinių formuluotės turėtų būti trumpos, aiškios, įprastos (tokios kaip pasitaikančios vadovėliuose), klausimai aiškiai suformuluoti. Be to uždavinių formuluotės turėtų atitikti tikslaus matematinio kalbėjimo standartus net tada, kai supratimui tai nebūtina. Toks kalbėjimas pedagoginiu požiūriu svarbus mokykloje, kad mokiniai mokytųsi tvarkingai, aiškiai mąstyti, kad geriau pažintų matematiką,

suvoktų, kas ji yra. Nors egzaminas šio pedagoginio tikslo neturi, jis negali jo neatitikti, būti prastesnis nei tai, prie ko privalu mokinius pratinti mokykloje.

2. Egzamino užduoties II dalies uždavinių vertinami tik atsakymai, bet uždaviniai nėra testiniai, jie ir pagal turinį buvo kiek sunkesni už testinius, daugiaveiksmiai. Taigi jie vertina tik kandidato gebėjimą išspręsti uždavinį nuo pradžios iki galo, todėl gali neatskleisti jo gebėjimo spręsti vieną ar kitą uždavinį, pavyzdžiui, vien dėl apmaudžios aritmetinės klaidos. Vertinant tik atsakymus, lieka neįvertintos kandidatų žinios, jų gebėjimas pagrįsti rezultatus. Mūsų nuomone, tai mažina paties egzamino galimybę atskleisti ir įvertinti kandidatų pasiekimus. Todėl siūlome mažinti šios dalies uždavinių skaičių, galbūt apskritai jos atsisakyti. Pagal egzamino programoje apibrėžtą pirmųjų dviejų užduoties dalių struktūrą, šių dalių uždaviniai negali būti ilgo sprendimo, reikalaujantys net kelių loginių ar techninių veiksmų, nes tada uždaviniai negali patikrinti, kiek kandidatai tų veiksmų išmokę. Mūsų nuomone, būtų tikslinga keisti matematikos egzamino programoje apibrėžtą egzamino užduoties II dalies struktūrą, siekiant, kad kandidatas būtų vertinamas ir už sprendimą.

3. Nors egzamino rezultatų statistinė analizė to neatskleidžia, galima daryti prielaidą, kad kandidatai itin prastai sprendė paskutinius uždavinius ne vien dėl to, kad jie buvo sunkesni, bet ir dėl to, kad didelė dalis rašiusiųjų paprasčiausiai nespėjo jų išspręsti. Netiesiogiai tai galima nuspėti iš to, kad paskutiniai uždaviniai pagal turinį nebuvo tiek sunkesni už ankstesnius, kiek prastesni buvo kandidatų rezultatai juos sprendžiant. Į tai verta atkreipti dėmesį: arba mažinti uždavinių skaičių, arba didinti laiką, skirtą sprendimui.

4. Kad ateityje būtų galima aiškiai nustatyti ir spręsti tokio tipo problemas, kokios nurodytos 3 punkte (kas kandidatams buvo sunkiausia? galbūt jie nespėjo parašyti?), taip pat kad būtų atskleistas bendras kandidatų požiūris ir jo nereprezentuotų vien garsiausi viešojoje erdvėje imantys dominuoti balsai, būtų vertingos egzaminą ką tik parašiusių kandidatų, galbūt ir matematikos mokytojų apklausos.

5. Egzamino užduotyje visų egzamino programoje nurodytų žinių ir gebėjimų aprėpti neįmanoma. Tačiau siektina, kad egzaminas aprėptų didesnę jų įvairovę, jokios temos (pvz., stereometrija, kurios šių metų egzamino užduotyje beveik nebuvo) neturėtų būti metai iš metų pamirštamos, ignoruojamos. Taip pat nereikėtų pamiršti žinių ir gebėjimų iš pagrindinės mokyklos kurso, dalis uždavinių turėtų tikrinti ir juos.

6. Egzamino uždavinių sunkumo spektras galėtų būti platesnis. Stengiantis, kad egzamino rezultatai būtų geresni, jokiais būdais nederėtų jo lengvinti atsisakant sunkesnių uždavinių. Tačiau negalima pamiršti ir labai lengvų uždavinių, net lengvesnių nei šių metų užduotyje. Ir tai verta daryti ne dėl egzamino lengvinimo: esamoje situacijoje tai pagerintų egzamino užduoties skiriamąją gebą. Be to, uždavinių sunkumas užduotyje apskritai didėjo nuo I iki III dalies, bet ne visada tolygiai (po sunkaus ėjo lengvesnis uždavinys, vėl sunkesnis ir t. t.). Vertėtų labiau stengtis sudėti uždavinius sunkėjimo tvarka, standartinius ir trumpesnius dėti prieš mažiau standartinius bei ilgesnius. Atsižvelgdami į šių metų egzamino rezultatų statistiką, siūlytume minimalius egzamino reikalavimus atitinkančius uždavinius (jų dalis) pateikti matematikos egzamino užduoties struktūrinių dalių pradžioje. Rekomenduotume minimalius pasiekimus tikrinančius uždavinius pateikti pasirenkamojo atsakymo arba trumpo sprendimo (kaip atskirus uždavinius arba struktūrinio uždavinio atskiras dalis), vertinamus nuo 1 iki 3 taškų, apimančius žinių ir supratimo bei matematikos taikymo gebėjimų grupes.

Ateityje reikėtų labiau atsižvelgti į uždavinio sudėtingumą, vertinant jį taškais. Mūsų manymu, kone kiekvienas teisingas kandidato žingsnis, kiekviena gerai atlikta procedūra, jei tik ji yra reikalinga uždavinio sprendimui, turėtų būti įvertinama. To galima siekti kartu didinant maksimalią surenkamų taškų sumą, nedidinant egzamino užduoties apimties ar net sumažinant ją. Būtų galima sumažinti trumpojo atsakymo (II dalies) uždavinių skaičių ar net jų atsisakyti (žr. 2 pasiūlymą).

7. Jei kandidatai nespėjo atlikti visos užduoties, tai gali būti susiję ne tik su jos apimtimi, bet ir su tuo, kad mokiniai lėtai mąsto ir lėtai skaito ilgesnes sąlygas, jiems reikia daug pastangų, kad suvoktų, kas parašyta, nes šie svarbūs mokinių gebėjimai nepakankamai išlavinti. Tokių problemų neturėtų kilti

su trumpos arba visiškai standartinės, lengvai atpažįstamos sąlygos uždaviniais, pvz., „išspręskite lygtį...“. Žinoma, trumpos, standartinės sąlygos uždavinių nereikia atsisakyti, jų užduotyje gali būti daug. Tačiau svarbus gebėjimas skaityti, įsiskaityti, įsigilinti, „suvirškinti“ ir sau susisteminti sąlygoje pateiktą informaciją taip pat turėtų būti tikrinamas. Žmogus, negebantis perskaityti ir suvokti sąlygos, greičiausiai ir mąsto sunkiai, grubiai, negeba darniai reikšti ne vien matematinių minčių, greitai susiorientuoti ne vien matematinėje situacijoje, bet negeba ir bendrauti kultūringai, tinkamai reaguodamas į pašnekovo mintis, nėra laisvas kalbos, itin svarbios žmogaus savybės, „vartotojas“, yra savo ribotumo įkaitas. Todėl nederėtų prastinti egzamino užduoties atsisakant žodinių, kiek nestandartiškai suformuluotų, ilgesnių sąlygų.

8. Taip pat reikia, kad užduotyje greta šiais metais vyraujančių grynai matematinių uždavinių būtų ir matematikos taikymo realiose situacijose uždavinių (kuriuose aprašytai situacijai reikia suteikti matematinę interpretaciją, pvz., šių metų užduotyje sulenktą strypą interpretuojant kaip laužtę, o stiklinę kaip ritinį).

9. Kadangi jau eilė metų egzamino užduoties geometrijos ir stochastikos tiek lengvesnių, tiek sunkesnių uždavinių sprendimo rezultatai būna prastesni, nei tikimasi, mokykloje šių temų dėstymui ir kartojimui siūlytume skirti ypatingą dėmesį. Egzamino atskleistas matematikos mokymo problemas reikia spręsti mokykloje, viliantis, kad brandos egzaminas ilgainiui ims atspindėti gerėjimo tendencijas. Pavyzdžiui, daug dėmesio reikia skirti geometrijos ir tikimybių teorijos mokymui (žr. 17 uždavinio analizę). Vienas iš būdų – papildomas mokytojų švietimas, pavyzdžiui, parodomosios pamokos, kurias vestų geriausi mokytojai, jas būtų galima net įrašyti ir viešai rodyti internete.

10. Sunkiau bus išspręsti egzamino atskleistas gilesnes problemas, verčiančias kovoti su mokinių matematinio pažinimo paviršutiniškumu. Tai sudėtinga užduotis, kurios įgyvendinimas turi prasidėti nuo problemos suvokimo, pripažinimo, jautrumo šiam klausimui atsiradimo ne tik tarp mokytojų, bet ir tarp vadovėlių autorių. Brandos egzaminas taip pat turėtų būti šiam klausimui jautrus, neleisdamas šio klausimo užmiršti, o matematikos mokymo mokykloje skurdinti, primityvinti.

Pabaigai negalime nepaminėti dar vienos priežasties – nedalykinės, kuriančios minėtąją dalykinio pobūdžio problemą. Tai mokymo(si) kultūros problema mokykloje. Jei mokykloje klesti patyčios, tvyro slogi, nužmoginanti atmosfera, apie matematinės kompetencijos įgijimą nėra ko ir galvoti. Juk autentiška matematinė kompetencija įgyjama ugdant žmogų, o jei vyrauja nužmogėjimas, tai jis pasireiškia ir dalykiniame lygmenyje – susikaupti, mąstyti ir suprasti neišmokstama. Akivaizdu, kad šios priežasties pašalinimas negali būti trumpas procesas.