LIETUVOS RESPUBLIKOS ŠVIETIMO IR MOKSLO MINISTERIJA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS

2014

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2014 m. birželio 5 d. **Trukmė – 3 val. (180 min.)**

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1)$; $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$; $S_n = \dfrac{b_1 - qb_n}{1-q} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – palūkanų norma, n – laikotarpių skaičius.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \dfrac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai, S – plotas.

Skritulio išpjova: $S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \dfrac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{šon.\ pav.} = \pi Rl$, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3.$

Nupjautinis kūgis: $S_{šon.\ pav.} = \pi(R+r)l$, $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – kūgio pagrindų spindulių ilgiai, V – tūris, H – aukštinės ilgis, l – sudaromosios ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \dfrac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$;

čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi RH$, $V = \dfrac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; čia $\vec{a} = \{x, y, z\}$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$,

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=a,\\ x=(-1)^k\arcsin a+\pi k;\ \text{čia}\ k\in\mathbf{Z},\ -1\le a\le 1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=a,\\ x=\pm\arccos a+2\pi k;\ \text{čia}\ k\in\mathbf{Z},\ -1\le a\le 1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=a,\\ x=\operatorname{arctg} a+\pi k;\ \text{čia}\ k\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$(cu)'=cu'$, $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

čia $u=u(x)$ ir $v=v(x)$ – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

Funkcijų išvestinės: $(a^x)'=a^x\ln a$, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

sudėtinės funkcijos $h(x)=g(f(x))$ išvestinė $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0, f(x_0))$ **lygtis:** $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Pagrindinės logaritmų savybės: $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$,

$\log_a x^k=k\log_a x$, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Derinių skaičius: $C_n^k=C_n^{n-k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **Gretinių skaičius:** $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Tikimybių teorija: atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $\mathrm{E}X=x_1p_1+x_2p_2+\ ...\ +x_np_n$, dispersija $\mathrm{D}X=(x_1-\mathrm{E}X)^2p_1+(x_2-\mathrm{E}X)^2p_2+\ ...\ +(x_n-\mathrm{E}X)^2p_n$.

I dalis

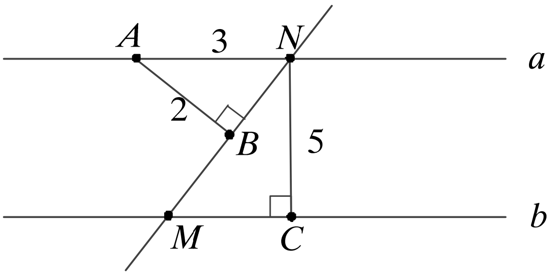
*Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–12) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu* ☒ .

01. Kokia turi būti m reikšmė, kad taškas $A(0;1)$ priklausytų funkcijos $f(x)=(m-2)x+m-3$ grafikui?

A $m=1$ **B** $m=2$ **C** $m=3$ **D** $m=4$

Juodraštis

02. Dvi lygiagrečias[1] tieses a ir b kerta tiesė MN. Atkarpos[2] $AN=3$, $AB=2$ ir $NC=5$.



Atkarpos MN ilgis:

A 6,5 **B** 7 **C** 7,5 **D** 8

Juodraštis

[1] lygiagrečios – równoległe – параллельные
[2] atkarpos – odcinki – отрезки

03. Lentelėje pateikti duomenys[1] apie vienos klasės mokinių miego trukmę.

Miego valandų skaičius	6	7	8	9	10	11
Mokinių skaičius	3	5	7	11	2	1

Šios imties[2] mediana lygi:

A 12 **B** 9 **C** 8,5 **D** 8

Juodraštis

04. Skaičių tiesėje pažymėti skaičiai a ir b.

Kuris iš žemiau užrašytų teiginių[3] yra teisingas?

A $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ **B** $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$ **C** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$ **D** $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$

Juodraštis

[1] duomenys – dane – данные
[2] imties – próby – выборки
[3] teiginys – zdanie – утверждение

05. Jei $x=\sqrt{2}$, tai reiškinio[1] $\dfrac{3}{2-x}$ reikšmė[2] lygi:

A $\dfrac{6-3\sqrt{2}}{2}$ **B** $\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}$ **C** $\dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$ **D** $\dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}$

Juodraštis

06. Tikimybė[3], kad kilus gaisrui suveiks pirmoji gaisro gesinimo sistema, yra 0,9, o kad suveiks antroji – 0,97. Gaisro gesinimo sistemos veikia nepriklausomai[4]. Kokia yra tikimybė, kad kilus gaisrui suveiks bent viena iš sistemų?

A 0,997 **B** 0,97 **C** 0,9 **D** 0,873

Juodraštis

07. Kubo įstrižainė[5] lygi $\sqrt{21}$. Koks yra kubo viso paviršiaus plotas[6]?

A $6\sqrt{7}$ **B** 21 **C** $8\sqrt{7}$ **D** 42

Juodraštis

1 reiškinio – wyrażenia – выражения
2 reikšmė – wartość – значение
3 tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность
4 nepriklausomai – niezależnie – независимо
5 įstrižainė – przekątna – диагональ
6 paviršiaus plotas – pole powierzchni – площадь поверхности

08. Kiek sprendinių turi lygtis $(2x+5)\sqrt{x+2}=0$?

A nei vieno **B** tik vieną **C** tik du **D** be galo daug

Juodraštis

09. Senovės Babilono gyventojai žinojo skaičiaus π reikšmę kaip $3\frac{1}{8}$. Keliais procentais apytikslė[1] π reikšmė $3{,}142$ didesnė už $3\frac{1}{8}$?

A 0,545 proc. **B** 0,544 proc. **C** 0,543 proc. **D** 0,542 proc.

Juodraštis

10. Jei $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}=2$, tai tg α lygus:

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 2 **D** 3

Juodraštis

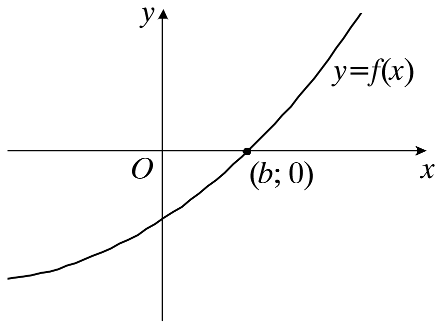
[1] apytikslė – przybliżona – приблизительное

11. Funkcijos $f(x) = \sin(2x+5)$ išvestinė[1] yra:

A $\cos(2x+5)$ **B** $2\cos(2x+5)$ **C** $2\cos(2x)+5$ **D** $-2\cos(2x+5)$

Juodraštis

12. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = e^{x-2} - 2$ grafikas. Šios funkcijos grafikas kerta[2] Ox ašį taške $(b; 0)$. Nustatykite b reikšmę.



A $\ln 2$ **B** $1+\ln 2$ **C** $2+\ln 2$ **D** $3+\ln 2$

Juodraštis

[1] išvestinė – pochodna – производная
[2] kerta – przecina – пересекает

II dalis

*Kiekvieno šios dalies uždavinio (13–22) teisingas atsakymas vertinamas **2 taškais** (kitu atveju vertinama 0 taškų). Išsprendę uždavinius, gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.*

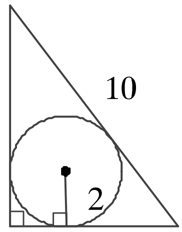
13. Dviejų dviratininkų judėjimas apibūdinamas dėsniais, išreiškiamais formulėmis $s_1(t) = t^2 + 10t$ ir $s_2(t) = 2t^2 + 7t + 2$. (s_1 ir s_2 – kelias kilometrais, t – laikas valandomis). Po kiek laiko dviratininkų greičiai bus lygūs.

Juodraštis

14. Apskaičiuokite sumą $2 + 5 + 8 + ... + 251$.

Juodraštis

15. Stačiojo[1] trikampio įžambinė[2] lygi 10 cm, o į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 2 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.



Juodraštis

16. Duoti taškai $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ didumą[3].

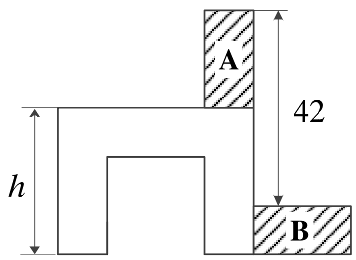
Juodraštis

17. Standartinis šešiasienis lošimo kauliukas[4] metamas du kartus. Kokia tikimybė, kad antrą kartą atsivers daugiau akučių negu pirmą kartą?

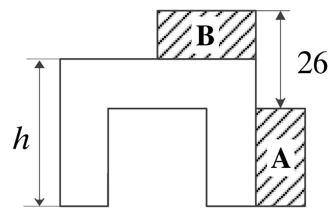
Juodraštis

[1] stačiojo – prostego – прямоугольного
[2] įžambinė – przeciwprostokątna – гипотенуза
[3] didumą – miarę – величину
[4] standartinis šešiasienis lošimo kauliukas – standardowa sześcienna kostka do gry – стандартная шестигранная игральная кость

18. Pirmajame paveiksle pavaizduota kėdutė ir du vienodi[1] stačiakampio gretasienio[2] formos blokeliai. Antrajame paveiksle pavaizduota ta pati kėdutė, o blokeliai sukeisti[3] vietomis. Naudodamiesi pateiktais duomenimis, apskaičiuokite kėdutės aukštį[4] h.



1 pav.



2 pav.

Juodraštis

19. Išspręskite nelygybę[5]

$$2^{5-x^2} \leq 16\,.$$

Juodraštis

[1] vienodi – jednakowe – одинаковые
[2] stačiakampio gretasienio – prostopadłościanu – прямоугольного параллелепипеда
[3] sukeisti – zamienić – заменить
[4] aukštį – wysokość – высоту
[5] nelygybė – nierówność – неравенство

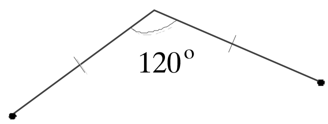
20. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ kritinių taškų sumą[1].

Juodraštis

21. Automobilio greitis 25 proc. didesnis už motociklo greitį. Apskaičiuokite motociklo greitį, jei automobilio greitis yra 85 km/h.

Juodraštis

22. Metalinį 2 m ilgio strypą sulenkė tiksliai per vidurį[2] taip, kad tarp strypo dalių susidarė 120° kampas. Koks atstumas tarp sulenkto strypo galų? Atsakymą **suapvalinkite iki centimetrų**.
Pastaba. $\sqrt{3}\approx 1{,}73205$.



Juodraštis

[1] kritinių taškų sumą – sumę punktów krytycznych – сумму критических точек
[2] strypą sulenkė tiksliai per vidurį – pręt schylono dokładnie w środku – стержень согнули точно в середине

III dalis

Išspręskite 23–30 uždavinius. Sprendimus bei atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

23. Duota funkcija $f(x) = \sin x - \cos(2x)$.

23.1. Apskaičiuokite $f(x)$ reikšmę, kai $x = \frac{\pi}{2}$.

(1 taškas)

Juodraštis

23.2. Parodykite, kad $f(x) = (\sin x + 1)(2\sin x - 1)$.

(2 taškai)

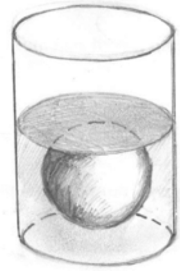
Juodraštis

23.3. Išspręskite lygtį $f(x) = 0$.

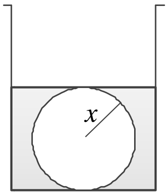
(2 taškai)

Juodraštis

24. Į ritinio[1] formos indą, kurio pagrindo spindulys 6, įdėtas metalinis rutuliukas[2]. Į indą įpilta tiek vandens, kad jo paviršius liečia rutuliuką.



24.1. Pažymėję rutuliuko spindulio ilgį x, įrodykite, kad taip įpilto[3] į indą vandens tūris[4] yra $V(x) = 72\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3$, $0 < x < 6$.



(2 taškai)

Juodraštis

24.2. Koks turi būti rutuliuko spindulio ilgis x, kad taip įpilto į indą vandens tūris būtų didžiausias?

(2 taškai)

Juodraštis

[1] ritinio – walca – цилиндра
[2] rutuliukas – kulka – шарик
[3] įpilto – wlanej – влитой
[4] tūris – objętość – объём

25. Duota funkcija

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+10).$$

25.1. Nustatykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį[1].

(2 taškai)

Juodraštis

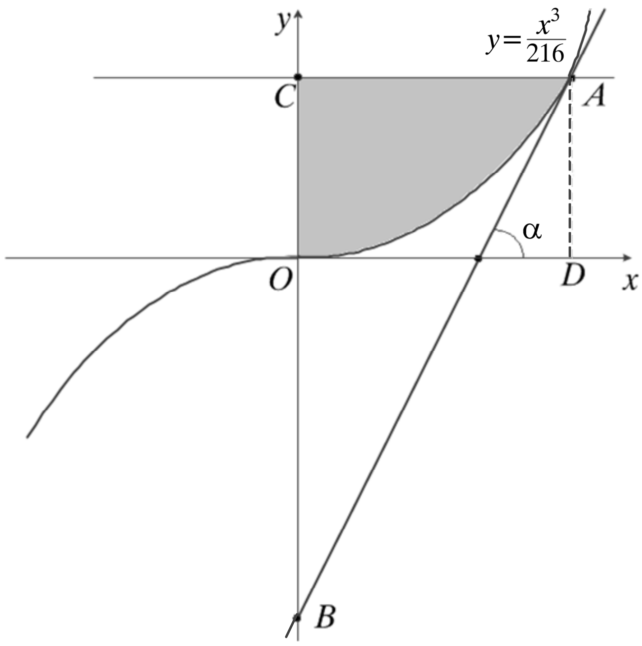
25.2. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x)$ reikšmės yra ne mažesnės[2] už –2.

(3 taškai)

Juodraštis

[1] apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения
[2] ne mažesnės – nie mnejsze – не меньшее

26. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x)=\dfrac{x^3}{216}$ grafikas, kurio liestinė[1] taške A su Ox ašimi sudaro kampą α. Žinoma, kad $\operatorname{tg}\alpha = 2$.



26.1. Raskite taško A koordinates.

(2 taškai)

Juodraštis

26.2. Parodykite, kad liestinės AB lygtis yra $y = 2x - 16$.

(1 taškas)

Juodraštis

[1] liestinė – styczna – касательная

26.3. Raskite liestinės susikirtimo[1] su *Oy* ašimi taško *B* koordinates.

(1 taškas)

Juodraštis

26.4. Figūrą *ABO* riboja funkcijos $y=\frac{x^3}{216}$ grafikas, liestinė *AB* ir *Oy* ašis. Figūrą *AOC* riboja funkcijos $y=\frac{x^3}{216}$ grafikas, *Oy* ašis ir tiesė *AC*, kuri yra lygiagreti *Ox* ašiai. Įrodykite, kad figūros *ABO* plotas[2] yra lygus figūros *AOC* plotui.

(3 taškai)

Juodraštis

[1] susikirtimo – przecięcia – пересения
[2] plotas – pole – площадь

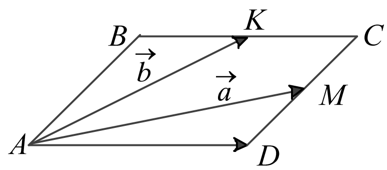
27. Duoti keturi teigiami skaičiai. Pirmas, antras ir trečias skaičiai sudaro aritmetinę progresiją[1], o šių skaičių suma lygi 12. Antras, trečias ir ketvirtas skaičiai sudaro geometrinę progresiją[2], jų suma lygi 19. Raskite šiuos keturis skaičius.

(4 taškai)

Juodraštis

28. Taškai K ir M yra lygiagretainio[3] $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio[4] taškai. Vektorių $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ ir $\overrightarrow{AK}=\vec{b}$.

(4 taškai)

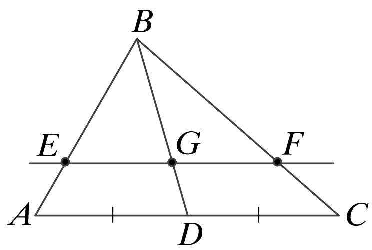


Juodraštis

[1] aritmetinę progresiją – ciąg arytmetyczny – арифметическую прогрессию
[2] geometrinę progresiją – ciąg geometryczny – геометрическую прогрессию
[3] lygiagretainio – równoległoboku – параллелограмма
[4] vidurio – środki – середины

29. Tiesė, lygiagreti trikampio ABC pagrindui AC, kerta kraštines AB, BC ir pusiaukraštinę[1] BD atitinkamai taškuose E, F ir G. Įrodykite, kad G yra atkarpos EF vidurio taškas[2].

(3 taškai)



Juodraštis

[1] pusiaukraštinę – środkową – медиану
[2] vidurio taškas – środek – середина

30. Mokslo metų gale mokiniai paprastai organizuoja išvykas. Vieni klasės mokiniai norėtų išvykos į Druskininkus, kiti – į Birštoną. Ginčą išspręsti padėjo klasės auklėtojas – matematikos mokytojas, pasiūlęs tokį pasirinkimo būdą. Jis atnešė dėžę, kurioje yra 11 vienodų rutulių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ir paprašė šešių mokinių atsitiktinai[1] ištraukti po rutulį iš dėžės ir padėti ant stalo. Jei ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginis skaičius[2], tai vykstama į Druskininkus, o jei lyginis – į Birštoną. Kokia tikimybė, kad klasė važiuos į Druskininkus?

(5 taškai)

Juodraštis

[1] atsitiktinai – losowo – случайно
[2] nelyginis skaičius – liczba nieparzysta – нечётное число